ELEMENTI
DI MECCANICA
E
D' IDRAULICA

DI

GIUSEPPE VENTUROLI

PROFESSORE DI MATEMATICA APPLICATA
NELLA UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

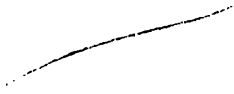
TERZA EDIZIONE

riveduta ed ampliata dall' AUTORE.

VOL. I.

MILANO 1817.
Dalla stamperia di PAOLO EMILIO GIUSTI
nella contrada di S. Margherita,
N.° 1118.

AGLI STUDIOSI.

La prima edizione di questi Elementi di Meccanica e d'Idraulica uscì alla luce in due volumi l'anno 1806. Nella seconda edizione stampata del 1809 si riprodusse la prima coll' aggiunta di un terzo volume di supplimenti.

Nella prima edizione la Meccanica e l'Idraulica razionale si erano ristrette alle sole Teoriche più elementari; si volle dunque aggiungere ne' supplimenti tutto quel che mancava a fornire un compiuto Trattato di Meccanica teorica, e formare ed istruire così il giovane allievo, onde potesse poi da sè stesso, e senz' altra introduzione, passare alla lettura delle sublimi Meccaniche di Lagrange e di Laplace, e così poggiare alle più alte cime della scienza.

Vuolsi nella presente ristampa conservare questo vantaggio, ed aggiungervi quello di una disposizione assai più metodica. Rifondendo la materia de' supplimenti nel corpo stesso dell' opera si schiva l' inconveniente di tornar due volte sopra le stesse proposizioni, e derivarle ora da un principio, ora da un altro. Per servire quanto si può alla chiarezza, giova raccogliere le verità matematiche sotto il più ristretto punto di vista; giova ordinarle in guisa, che tutte, con un progresso perpetuo ed uniforme, si derivino da pochissimi principj; conciossiachè disposte in tal modo più facilmente si apprendono, e più fisse rimangono nella mente, e più prontamente si richiamano all' uopo.

Riordinandosi la parte teorica; si è volutò del pari avvantaggiare la parte pratica coll' aggiunta di molti insegnamenti utili agl' Ingegneri particolarmente nel Trattato delle macchine. Non si possono abbracciare con verun Trattato le infinite combinazioni delle macchine immaginate o immaginabili; ma ben si può insegnare per principj; e dichiarare con iscelti esempj quanto è necessario, perchè ciascuno possa fare da sè il calcolo di qualsivoglia macchina più complicata. E questo è ciò che s' è inteso particolarmente di fare in questa edizione.

Le aggiunte all' Idraulica saranno anche più copiose. Nella parte teorica si troverà promossa a maggiore ampiezza la teoria del movimento de' fluidi riferito a due coordinate; teoria tutta nuova, e non toccata da veruno prima del Saggio che ne fu dato nella seconda edizione di quest' opera.

Nella parte pratica, oltre alcune nuove idee circa l' uso dell' asta ritrometrica e del pendolo idrometrico, s' inseriranno gli utili avvertimenti che intorno alla distribuzione delle acque hanno dato ultimamente il sig. cav. Brunacci ed il sig. Antonio Tadini. Nel Trattato delle macchine idrauliche si spiegherà colla dovuta accuratezza la teorica dell' ariete idraulico e di altre curiose macchine per alzar acqua; e si mostrerà per esteso la teorica ed il calcolo de' mulini ad acqua destinati a muover macine o seghe o pestatoj; de' mulini a vento; e finalmente delle utilissime e celebratissime macchine a vapore.

ELEMENTI

DI

MECCANICA.

PREFAZIONE.

La Meccanica per ciò che riguarda il modo di trattarla può comodamente dividersi così che altra sia Meccanica Speculativa o Razionale, altra Meccanica Istrumentale o Pratica. La qual divisione essendo piaciuta all' incomparabile Neuton, non temerò che possa essere da altri disapprovata.

Come la Geometria suppone il corpo esteso, così la Meccanica Razionale il suppone impenetrabile, inerte, animato da forze motrici. Le leggi di queste forze finge essa e varia a suo talento, niente sollecita d'indagare se siano o no tali forze nella natura. Nel che s'assomiglia alla Geometria, la quale fingendosi che un punto o una linea s' aggiri secondo certa legge,

e considerando le proprietà della figura che per questo moto è descritta, punto non cerca se tal movimento e tal figura abbia esistito o sia per esister giammai. Da che si vede che entrambe queste scienze non cercano altrove l'oggetto loro, ma sel creano e sel compongon da sè per operazioni mentali. La Meccanica considerata sotto questo aspetto appartiene alla Matematica pura; e non ha men salde basi, nè meno chiara evidenza di quella che abbiasi la Geometria stessa.

Ma dalla contemplazione della quantità astratta i bisogni della società ci richiamano ad ogni tratto alla quantità concreta e sensibile, e dal mondo intellettuale ci ritraggono al mondo fisico. Egli è allora che dato bando ai concetti puramente ideali ed alle capricciose ipotesi, ci conviene rintracciare nella natura stessa i veri dati della scienza. Pertanto ad assicurare il passaggio dalla Meccanica speculativa alla pratica, dovremo primieramente accertarci se i corpi naturali siano di verità impenetra-

bili ed inerti: poi rivolgendoci ai diversi agenti eccitatori del moto, cercar di conoscere la misura e la legge delle loro azioni. Al che niun altra guida può scorgerci fuor dell' osservazione e della sperienza, uniche sorgenti di tutte le nostre nozioni sulle primarie proprietà de' corpi. Fra gl' infiniti sistemi e leggi di forze che la Meccanica Razionale finge e compone ad arbitrio, basterà allora trasceglier quelle che abbiam trovato aver luogo in natura, e per tal via gli astratti dogmi della Scienza con sicuro successo s' applicheranno alla pratica.

Seguendo la traccia che le premesse riflessioni ci additano, ho compreso nei primi due Libri gli Elementi della Meccanica Razionale. La dottrina della composizione delle forze, e quella del centro di gravità esposti ne' primi dodici Capi ponno aversi come una Introduzione a tutto il Trattato. Segue l' esposizione delle leggi generali dell' equilibrio nel primo Libro, e di quelle del moto nel secondo. Entrambe

procedono collo stesso ordine, parlandosi prima d' un punto o elemento materiale isolato, appresso d' un sistema di punti supposto di forma invariabile, in ultimo de' sistemi di forma variabile.

I tre Libri seguenti si riferiscono alla Meccanica Istrumentale o Pratica. La qual trattazione per le cose dette ha due parti; dovendosi in prima riconoscere dall' osservazione e dall' esperienza le qualità meccaniche de' corpi, e le leggi delle forze motrici; poscia applicare le leggi universali della Meccanica alle ricerche che più da vicino riguardano la pratica.

Al primo oggetto ho inteso di soddisfare nel terzo Libro, nel quale dalle migliori sperienze ho procurato raccogliere le più accertate e le più estese nozioni sulla misura e sul modo di agire delle forze naturali. Queste forze sono di due maniere: poichè altre sono atte a produr moto, altre non vagliono che a spegnere o diminuire il moto prodotto dalle prime. Per il che seguendo quest' ordine ho trattato prima

delle forze attive, poi delle forze passive, che con altro nome si dicono resistenze.

Nel quarto Libro ho considerato l'equilibrio delle fabbriche, sciogliendo i principali problemi che a ciò si riferiscono. Nel Quinto ho esposta la Teoria delle Macchine nell'equilibrio, nello stato prossimo al moto, e nel moto attuale; sembrandomi manchevole e difettosa ogni trattazione dagli Strumenti Meccanici, nella quale non si considerino partitamente questi tre stati.

Per ultimo in una breve Appendice ho trattato del principio delle velocità virtuali; e seguendo la scorta del ch. Lagrange ne ho mostrato l'uso nella soluzione de' problemi di meccanica, ed il modo con cui da esso discendono i principali teoremi di questa scienza.

Sin qui della materia del libro. Per ciò che riguarda il modo d'esporla ho conosciuto per prova quanto sia malagevole tener giusto mezzo tra la soverchia prolissità, e la soverchia strettezza. Non so se

in questa parte possa sperarsi di soddisfare al genio di tutti. Poichè son di quelli che vorrebbon esser condotti per via pianissima e si sdegnano del più lieve intoppo, altri per l'opposto prendono a noja le dichiarazioni troppo minute, e voglion pure che qualche cosa si lasci all'ingegno ed alla diligenza de' giovani. Io ho voluto essere anzi conciso che no, ma non vorrei esserlo stato soverchiamente. Ad ogni modo potendo questi Elementi servir di Testo a pubbliche o private Lezioni, ad ogni difetto di questo genere supplirà facilmente la viva voce; ond'io mi terrò assai pago se la scelta e la distribuzione delle materie incontri favorevole accoglimento.

ELEMENTI DI MECCANICA

LIBRO PRIMO

DELL' EQUILIBRIO

CAP. I.

Nozioni preliminari.

1. MECCANICA è la scienza dell' equilibrio e del moto. Quella parte che riguarda l' equilibrio dicesi particolarmente *Statica;* quella che riguarda il moto suol dirsi, quantunque meno propriamente, *Dinamica.*

2. *Moto.* è passaggio da luogo a luogo; *quiete* permanenza nello stesso luogo.

3. Non v' ha moto senza determinata velocità e direzione. *Velocità* è il rapporto dello spazio percorso dal mobile al tempo in cui è percorso: nel che vuolsi avvertire che non si paragonano già fra loro le quantità concrete, ma i numeri che le rappresentano, cioè i rapporti di ciascheduna alla sua unità. *Direzione* è la retta percorsa dal mobile a ciascun istante.

4. Se la velocità è costante, dicesi il moto *uniforme,* ovvero *equabile;* se cangia, dicesi *vario.* E se la direzione è costante, il moto è *rettilineo;* se cangia continuamente, *curvilineo.*

5. Così il moto come l' equilibrio sono affezioni della materia. Intendiamo poi per *materia* una sostanza dotata d' impenetrabilità e d' inerzia.

6. *Impenetrabilità* è quella proprietà per cui diverse particelle elementari di materia non possono simultaneamente occupare lo stesso luogo.

7. *Inerzia* è quella proprietà per cui ogni particella elementare di materia abbandonata a sè stessa conserva lo stato impresso sia di quiete, sia di moto uniforme e rettilineo.

8. *Corpo* è l'aggregato di più elementi materiali, non divisi che da picciolissimi intervalli. La somma degli elementi materiali che costituiscono il corpo, è la sua *massa;* gl' intervalli che li dividono, si chiaman *pori;* lo spazio occupato dalla massa e da' pori, è il *volume;* il rapporto tra la massa e il volume, è la *densità* del corpo.

9. *Forza* o *potenza* è la cagione che imprime o tende ad imprimer moto. Ogni forza produce moto *attuale,* se non venga elisa da forze contrarie. Se poi resta elisa, il moto cui essa tende a produrre, dicesi *virtuale*.

10. Le forze non ponno conoscersi nè misurarsi altramente che da' loro effetti. Or l' effetto d' una forza applicata ad un elemento materiale è d' imprimergli una certa velocità secondo una certa direzione. Questa velocità, sia poi attuale o virtuale, valutata secondo questa direzione assumesi a misura della forza.

11. *Equilibrio* è lo stato d' un mobile sollecitato da più forze che scambievolmente s'elidono.

CAP. II.

Della composizione delle forze.

12. *Proposizione I.* Concorrendo nello stesso punto o elemento materiale più forze con direzioni comunque diverse, si comporrà di queste forze una forza unica ad esse equivalente.

Infatti il moto che il punto prenderà o tenderà a prendere per l' azion simultanea di tutte le forze dovrà pure avere una velocità ed una direzione determinata, come se procedesse da una forza unica.

13. Le forze agenti simultaneamente sul mobile si dicono *componenti* rispetto di quell' unica che ad esse equivale, la qual dicesi *risultante.*

14. *Proposizione II.* Se due forze concorrono in un punto ad angolo qualunque, compiuto il parallelogrammo co' lati che le rappresentano, la diagonale rappresenterà la risultante.

Sia il punto A (Fig. 1) animato dalle due forze AB, AC; per la prima delle quali in un certo tempo t esso verrebbe in B descrivendo il lato AB, e per la seconda verrebbe in C descrivendo il lato AC. Dico che per l' azion simultanea delle due forze, esso nel tempo t verrà in D descrivendo la diagonale AD.

Infatti (*) la forza AB essendo parallela al lato CD non può nè accostare il mobile A al lato CD,

(*) Newton, *Princip. Axiom. Coroll.* 1.

nè scortarnelo. Dunque il punto A per le due forze AB, AC giungerà al lato CD nello stesso tempo nel quale vi giungerebbe per la sola forza AC; vale a dire nel tempo t. Similmente si prova che il punto A giungerà al lato BD nel tempo t. Adunque dopo il tempo t dovrà quel punto trovarsi tanto sul lato CD quanto sul lato BD. Si troverà dunque in D, estremo della diagonale.

15. *Corollario I.* La risultante di due forze *cospiranti* è uguale alla loro somma; quella di due forze *opposte* è uguale alla loro differenza.

16. *Coroll. II.* Nel triangolo ABD i lati AB, BD, AD rappresentano le tre forze AB, AC, AD; ed i seni degli angoli BAD, BDA, ABD son gli stessi che i seni degli angoli BAD, CAD, BAC, che son gli angoli che fanno tra loro le direzioni delle forze. Onde si vede che il triangolo ABD rappresenta ne' suoi elementi le tre forze suddette, e i loro angoli.

17. *Coroll. III.* Ciascheduna delle tre forze AB, AC, AD è proporzionale al seno dell'angolo formato dalle altre due.

18. *Coroll. IV.* E due qualunque di esse stanno fra loro in ragione inversa delle perpendicolari condotte sulle loro direzioni da un punto preso ad arbitrio sulla direzione della terza.

19. *Proposizione III.* Se tre forze concorrono in un punto con direzioni qualunque, compiuto il parallelepipedo coi lati che le rappresentano, la diagonale rappresenterà la risultante.

Siano le tre forze (Fig. 2) AM, AN, AO. Compiuto il parallelepipedo si segni la diagonale

AX, e si conducono le rette AY, OX. Essendo i lati AO, YX eguali e paralleli, lo saranno pure le rette AY, OX; e sarà $AOXY$ un parallelogrammo che avrà per diagonale AX. Ora la AY sarà la risultante delle due forze AM, AN (14) e la AX sarà la risultante delle due AY, AO, che vale a dire delle tre AM, AN, AO.

20. *Coroll.* Generalmente se più forze concorrono in un punto, è facile l' assegnare il valore e la posizione della risultante.

Si formi un parallelogrammo coi lati che esprimono le prime due forze, e la diagonale esprimerà la risultante delle due prime. Si formi un nuovo parallelogrammo con questa diagonale e colla retta che esprime la terza forza, e la nuova diagonale sarà la risultante delle tre prime. Proseguendo così, l'ultima diagonale sarà la risultante di tutte.

Oppure si formi un poligono i lati del quale cominciando dal punto cui sono applicate le forze siano successivamente eguali e paralleli a ciascheduna delle forze, e diretti nello stesso senso. Si chiuda il poligono congiungendo i termini del primo e dell' ultimo lato. La retta che chiude il poligono, è la risultante.

Che se le forze e le loro direzioni sono date in numeri, e si voglia per simil modo determinata la risultante, il problema si scioglie per la trigonometria come può dedursi da quanto si è detto all'art. 16 risolvendo tanti triangoli meno uno quante sono le forze.

21. *Proposizione IV.* Una forza può risolversi in due ad essa equivalenti.

Rappresentando infatti quella forza con una linea retta, e' formando attorno di essa come diagonale un parallelogrammo, i lati del parallelogrammo esprimeranno due forze ad essa equivalenti. Onde si vede (16) che il problema è indeterminato, salvo se fosser dati di più i valori delle due forze componenti, o le direzioni loro, o finalmente il valore dell' una e la direzione sia di quella stessa, sia dell' altra forza.

22. *Coroll.* Generalmente se formasi un poligono qualunque, prendendo per un de' lati la retta che rappresenta la forza data, gli altri lati esprimeranno (20) le forze nelle quali essa può risolversi.

CAP. III.

Formole che esprimono la risultante, date le componenti, e viceversa.

23. La composizione e la risoluzione delle forze sono d' uso continuo nella Meccanica. Però fia bene rendersi famigliari le formole che esprimono la relazione fra la risultante e le componenti ne' casi di più frequente occorrenza. Queste formole si deducon tutte dalla trigonometria analitica, giacchè la composizione delle forze, e la risoluzione delle medesime sotto date condizioni si riducono (16) alla soluzione d' un triangolo.

24. *Proposizione I.* Concorrano in un punto due forze P, Q ad angolo θ. Si cerca la risultante S, e gli angoli α, β che essa fa colle componenti P, Q.

Sarà $S = \sqrt{(P^2 + 2PQ \cos. \theta + Q^2)}$

$$\sin. \alpha = \frac{Q \sin. \theta}{S}, \ \sin. \beta = \frac{P \sin. \theta}{S}.$$

25. *Coroll. I.* Se le due forze P, Q sono eguali, avremo

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \theta; \ S = 2P \cos. \alpha.$$

26. *Coroll. II.* Se le due forze P, Q concorrono ad angolo retto, sarà

$$S = \sqrt{(P^2 + Q^2)};$$

$$\sin. \alpha = \cos. \beta = \frac{Q}{S}; \ \sin. \beta = \cos. \alpha = \frac{P}{S}.$$

27. *Coroll. III.* E se tre forze P, Q, R concorrono in un punto ad angoli retti, la risultante S, e gli angoli α, β, γ che essa fa colle tre forze saranno determinati come segue

$$S = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}$$

$$\cos. \alpha = \frac{P}{S}; \ \cos. \beta = \frac{Q}{S}; \ \cos. \gamma = \frac{R}{S}.$$

28. *Coroll. IV.* Di qui segue palesemente

$$\cos. \alpha^2 + \cos. \beta^2 + \cos. \gamma^2 = 1.$$

E già dalla Geometria è noto che se una retta forma gli angoli α, β, γ con tre assi ortogonali, la somma de' quadrati de' loro coseni è sempre uguale all' unità.

29. *Proposizione II.* Data una forza S che faccia gli angoli α, β con due assi tra loro perpendicolari, risolverla in due P, Q parallele rispettivamente a questi assi.

Sarà $P = S \cos. \alpha$; $Q = S \cos. \beta$; ossia, poichè $\cos. \beta = \sin. \alpha$; sarà $P = S \cos. \alpha$; $Q = S \sin. \alpha$.

38. *Coroll.* Similmente se la forza S farà gli angoli α, β, γ con tre assi ortogonali, e si voglia risolverla in tre P, Q, R parallele ai tre assi, riuscirà

$$P = S \cos. \alpha ; \; Q = S \cos. \beta ; \; R = S \cos. \gamma$$

31. *Proposizione III.* Concorrano in un punto le forze S', S'', S''' .... le quali riferite e tre assi ortogonali che chiamerò gli assi delle x, dalle y e delle z, faccian con essi rispettivamente gli angoli α', β', γ'; α'', β'', γ''; α''', β''', γ'''; .... Si cerca la risultante S, e gli angoli α, β, γ che essa fa coi tre assi.

Risolva ciascuna delle forze date in tre parallele ai tre assi (30) e chiamando P la somma di quelle parallele alle x, Q la somma dalle parallele alle y, R la somma delle parallele alle z, avrò (15)

$$(A) \begin{cases} P = S' \cos. \alpha' + S'' \cos. \alpha'' + S''' \cos. \alpha''' ... \\ Q = S' \cos. \beta' + S'' \cos. \beta'' + S''' \cos. \beta''' ... \\ R = S' \cos. \gamma' + S'' \cos. \gamma'' + S''' \cos. \gamma''' ... \end{cases}$$

Componendo poscia le tre forze P, Q, R (27) ottengo

$$S = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}$$

$$\cos. \alpha = \frac{P}{S} ; \; \cos. \beta = \frac{Q}{S} ; \; \cos. \gamma = \frac{R}{S}.$$

31. *Coroll. I* Qui pure fra ciascuna terna degli angoli α', β', γ'; α'', β'', γ'' ec. deggiono aver luogo le equazioni (28)

$$\cos. \alpha'^2 + \cos. \beta'^2 + \cos. \gamma'^2 = 1$$

$$\cos. \alpha''^2 + \cos. \beta''^2 + \cos. \gamma''^2 = 1$$

. . . .

$$\cos. \alpha^2 + \cos. \beta^2 + \cos. \gamma^2 = 1$$

32. *Coroll. II.* Se le forze concorrenti in un punto saranno due sole S', S'' e l'angolo che esse fanno tra loro sia θ, ed S la loro risultante, avremo (24)

$$S^2 = S'^2 + 2S'S'' \cos. \theta + S''^2$$

Altronde avremo (31)

$$S^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = (S' \cos. \alpha' + S'' \cos. \alpha'')^2$$
$$+ (S' \cos. \beta' + S'' \cos. \beta'')^2 + (S' \cos. \gamma' + S'' \cos. \gamma'')^2;$$

ove svolgendo i termini, e riducendo, per essere $\cos. \alpha'^2 + \cos. \beta'^2 + \cos. \gamma'^2 = 1$ ec. riuscirà

$$S^2 = S'^2 + S''^2$$
$$+ 2S'S''(\cos. \alpha' \cos. \alpha'' + \cos. \beta' \cos. \beta'' + \cos. \gamma' \cos. \gamma'').$$

Paragonando questo valore di S^2 col precedente, risulta

$$\cos. \theta = \cos. \alpha' \cos. \alpha'' + \cos. \beta' \cos. \beta'' + \cos. \gamma' \cos. \gamma''.$$

Per mezzo di questo Teorema, conoscendo l'inclinazione di due rette a tre assi ortogonali, conosceremo anche l'inclinazione di esse due rette tra loro.

Se le due rette sono tra se perpendicolari, sarà

$$\cos. \alpha' \cos. \alpha'' + \cos. \beta' \cos. \beta'' + \cos \gamma' \cos. \gamma'' = 0.$$

33. *Coroll. III.* Viceversa sia data la forza S che faccia gli angoli α, β, γ colle coordinate x, y, z e si voglia risolverla in più forze.

La risolvo prima in tre P, Q, R parallele ai tre assi, e queste riusciranno (29)

$$P = S \cos. \alpha \;;\quad Q = S \cos. \beta \;;\quad R = S \cos. \gamma.$$

Ciascheduna di queste tre potrà poscia risolversi ad arbitrio in più forze S', S'', S''' .... mediante le equazioni (A).

34. *Proposiz. IV.* Sulla curva AMB (Fig. 3) riferita a due assi ortogonali sia il punto M sollecitato dalla forza P nel senso delle x, e dalla forza Q nel senso delle y. A queste due forze si

vogliono sostituire altre due, l' una T che agisca secondo la tangente MT, l' altra N che agisca secondo la normale MN.

Considerando il triangolo differenziale della curva, del quale è l' ipotenusa $Mm = ds$, ed i cateti $Mr = dx$, $mr = dy$ scorgesi che risolvendo la forza P in due, l' una secondo MT, l'altra secondo MN, sarà (29) la prima P cos. $PMT = \frac{P\,dx}{ds}$, la seconda P sin. $PMT = \frac{P\,dy}{ds}$. E similmente risolvendo la forza Q in due, l'una secondo MT, l' altra secondo MN prolungata, sarà la prima Q cos. $QMT = \frac{Q\,dy}{ds}$, la seconda Q sin. $QMT = \frac{Q\,dx}{ds}$.

Ora le due componenti tangenziali sono cospiranti, le due componenti normali sono opposte fra loro. Dunque (15)

$$T = \frac{P\,dx + Q\,dy}{ds};\quad N = \frac{P\,dy - Q\,dx}{ds}.$$

Se alcuna delle forze P, Q agisse in senso opposto alle rispettive coordinate x, y dopo assumersi negativa.

35. *Coroll.* Viceversa date due forze T; N l' una diretta secondo la tangente MT, l' altra secondo la normale MN, si potranno sostituir loro altre due forze P, Q agenti nel senso delle x, e delle y. E sarà

$$P = \frac{T\,dx + N\,dy}{ds};\quad Q = \frac{T\,dy - N\,dx}{ds}.$$

La formola suppone che le direzioni delle forze T, N facciano angolo acuto colle x positive. Se alcuna di queste forze avesse direzione contraria, dovrebbe assumersi negativa.

CAP. IV.

Composizione delle forze parallele.

36. *Proposizione.* Se due forze parallele ed agenti per lo stesso verso sono applicate a due punti A, B connessi invariabilmente fra loro, la risultante è parallela alle forze componenti, eguale alla loro somma, e divide la retta AB in parti reciprocamente proporzionali alle forze stesse.

Sieno le due forze parallele AP, BQ (Fig. 4). Ai punti A, B s'intendano applicate due forze eguali ed opposte AM, BN di qualunque grandezza, dirette secondo la AB prolungata, e compiuti i parallelogrammi si segnino le diagonali AX, BY. Siccome le due forze aggiunte AM, BN si elidono scambievolmente, così la risultante delle due forze AP, BQ è la stessa che quella delle quattro forze $AP, AM; BQ, BN$: ossia delle due AX, BY. Si prolunghino AX, BY sicchè s' incontrino nel punto S, e s' intendano entrambe le forze AX, BY trasportate in S, e risoluta ciascuna d' esse in due, l' una secondo KL parallela ad AB, l' altra secondo SG parallela alle forze AP, BQ. Risulterà da questa decomposizione (15) secondo KL una forza $= AM - BN = 0$: e secondo SG una forza $= AP + BQ$. Adunque la risultante delle due forze AP, BQ è parallela alle medesime, ed eguale alla loro somma.

Di più è $AP : PX :: SG : AG$ e $BQ : QY :: SG : GB$; onde essendo $PX = QY$ risulta $AP . AG = BQ . BG$ ossia $AP : BQ :: BG : AG$.

37. *Coroll. I.* Se le due forze AP, BQ (Fig. 5) agiscano in senso opposto l' una all' altra, sarà la risultante eguale alla loro differenza, agirà nel senso della forza prevalente, ed il punto G non cadrà più nell' intervallo AB delle due forze, ma fuori, e dalla parte della forza che prevale. E sarà tuttavia $AP : BQ :: BG : AG$.

38. *Coroll. II.* Sia un sistema di punti A, B, C, D, (Fig. 6) tra loro invariabilmente connessi, e sollecitati dalle forze perallele P, Q, R, S. Debba trovarsi la loro risultante.

Congiunta AB, si divida in E in ragion reciproca delle forze P, Q. Passerà per E la risultante delle due forze P, Q ad esse parallela, ed eguale a $P + Q$. Similmente congiunta EC si tagli in F in ragion reciproca delle forze $P + Q$ ed R. Passerà per F la risultante delle tre forze P, Q, R ad esse parallela ed $= P + Q + R$. Infine congiunta FD, si divida in G in ragion reciproca delle forze $P + Q + R$ ed S. Passerà per G la risultante delle quattro forze P, Q, R, S eguale alla loro somma, e colla direzione GX ad esse parallela. Similmente si procede per qualunque numero di forze.

Se alcuna delle forze agisse in senso opposto alle altre, si opera come s' è indicato all' articolo precedente.

CAP. V.

Risoluzione d' una forza in altre ad essa parallele.

37. Come di più forze parallele si compone una, così una forza data può risolversi per una operazione inversa in più altre ad essa parallele ed equivalenti. Quando non è dato che il numero delle forze nelle quali vuolsi decomporre la proposta, la risoluzione può farsi in infinite guise, ed è il problema indeterminato. Rendesi però determinato aggiungendo altre condizioni: di che daranno esempio i seguenti problemi.

40. *Proposizione I.* Risolvere la forza S applicata al punto (Fig. 4) in due forze P, Q applicate ai punti dati A, B della retta AGB.

Sarà per l' art. 36.

$$S : P : Q :: AB : BG : AG.$$

41. *Coroll.* Qui se i due punti A, B prendono in mezzo il punto G, le due forze P, Q agiranno per lo stesso verso della data S, che sarà eguale alla loro somma: ma se giacciono entrambi dalla stessa parte del punto G (Fig. 5) la forza P applicata al punto più vicino A cospirerà colla forza S, voglio dire agirà nello stesso senso, l' altra forza Q agirà in senso contrario; e sarà la forza S eguale alla differenza delle due P, Q.

42. *Proposizione II.* Risolvere la forza S applicata al punto G (Fig. 7) in tre forze P, Q, R applicate a tre punti dati A, B, C.

47. *Coroll. II.* In più modi si può procedere alla ricerca del centro delle forze parallele. Il primo consiste nella costruzione insegnata all' art. 38. Gli altri consistono nel determinare la posizione analiticamente, o rispetto a tre piani ortogonali, o rispetto a tre punti dati, come nelle due seguenti Proposizioni mostreremo.

48. *Proposizione II.* Date le forze parallele e le coordinate de' loro punti d'applicazione, determinare le coordinate del centro delle forze.

Siano i punti $A, B, C \ldots$ animati dalle forze parallele $P, Q, R \ldots$ Riferito il sistema a tre assi ortogonali, siano le coordinate di quei punti x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; .... Le coordinate del centro delle forze parallele saranno

$$X=\frac{Px+Qx'+Rx''\ldots}{P+Q+R\ldots};\quad Y=\frac{Py+Qy'+Ry''\ldots}{P+Q+R\ldots};$$

$$Z=\frac{Pz+Qz'+Rz''\ldots}{P+Q+R\ldots}$$

Dim. Consideriamo da prima i due punti A, B (Fig. 8) animati dalle forze P, Q e determinati dalle ascisse $OA'=x$, $OB'=x'$. Sia E il centro delle due forza P, Q e gli corrisponda l' ascissa $OE'=\xi$. Sarà (36)

$$P:Q::BE:AE::B'E':A'E'::x'-\xi:\xi-x.$$

Quindi $\quad (P+Q)\,\xi=Px+Qx'.$

Ora s' intenda congiunto il punto E col terzo C del sistema, cui corrisponde la forza R, e l'ascissa x''. Sia F il centro delle due forze $P+Q$ ed R, e gli corrisponda l' ascissa ξ'. Avremo allo stesso modo

$$(P+Q+R)\,\xi'=(P+Q)\,\xi+Rx''$$

ossia, sostituendo il valor precedente,

$$(P+Q+R)\,\xi'=Px+Qx'+Rx''.$$

E così procendendo sino ad incontrare il centro di tutte le forze, cui corrisponde l'ascissa X, otterremo

$$(P+Q+R\ldots)\ X=Px+Qx'+Rx''\ldots$$

Riferendo adesso la posizione de' punti successivamente agli assi delle y e delle z avremo similmente

$$(P+Q+R\ldots)\ Y=Py+Qy'+Ry''\ldots$$
$$(P+Q+R\ldots)\ Z=Pz+Qz'+Rz''\ldots$$

dalle quali equazioni si traggono gli annunciati valori di X, Y, Z.

49. *Scolio.* Questi valori ponno scriversi più concisamente così

$$X=\frac{\Sigma\,.\,Px}{\Sigma\,.\,P};\ Y=\frac{\Sigma\,.\,Py}{\Sigma\,.\,P};\ Z=\frac{\Sigma\,.\,Pz}{\Sigma\,.\,P}$$

disegnando $\Sigma\,.\,Px$ la somma de' prodotti di ciascheduna forza nella rispettiva ascissa, e $\Sigma\,.\,P$ la somma delle forze ec.

50. *Coroll.* Se i punti del sistema giacciono tutti in un piano, prendendo su questo piano le coordinate x, y svaniscono le z, e rimangono le sole equazioni $X=\frac{\Sigma\,.\,Px}{\Sigma\,.\,P}$; $Y=\frac{\Sigma\,.\,Py}{\Sigma\,.\,P}$. E se i punti del sistema cadon tutti in una stessa retta, prendendo questa per asse delle x, svaniscono anche le y, e resta l'equazion sola $X=\frac{\Sigma\,.\,Px}{\Sigma\,.\,P}$.

51. *Proposizione III.* Date le distanze de' punti A, B, $C\ldots$ da un punto O, e le loro distanze scambievoli, determinare la distanza del centro delle forze dal punto O.

Siano dal punto O le distanze $OA=d$, $OB=d'$, $OC=d''\ldots$ e le distanze scambievoli $AB=f$,

$AC = f'$, $BC = f''$.... e sia D la distanza cercata del centro delle forze dal punto O. Sarà

$$D^2 = \frac{Pd^2 + Qd'^2 + Rd''^2 \ldots}{P+Q+R\ldots} - \frac{(PQf^2 + PRf'^2 + QRf''^2 \ldots)}{(P+Q+R\ldots)^2}$$

Dim. (*) Sarà infatti (48) $D^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 =$

$$\frac{(Px+Qx'+Rx''\ldots)^2 + (Py+Qy'+Ry''\ldots)^2 + (Pz+Qz'+Rz''\ldots)^2}{(P+Q+R\ldots)^2}$$

Ma

$$(Px+Qx'+Rx''..)^2 = (P+Q+R..)(Px^2+Qx'^2+Rx''^2..) - \left\{PQ(x'-x)^2 + PR(x''-x)^2 + QR(x''-x')^2\ldots\right\}.$$

Così pure

$$(Py+Qy'+Ry''\ldots)^2 = (P+Q+R..)(Py^2+Qy'^2+Ry''^2..) - \left\{PQ(y'-y)^2 + PR(y''-y)^2 + QR(y''-y')^2\ldots\right\}$$

Ed infine

$$(Pz+Qz'+Rz''\ldots)^2 = (P+Q+R\ldots)(Pz^2+Qz'^2+Rz''^2\ldots) - \left\{PQ(z'-z)^2 + PR(z''-z)^2 + QR(z''-z')^2..\right\}$$

Ora si sommino questi tre quadrati, e si sostituisca questa somma nel valore del D^2; ed avvertendo essere $x^2+y^2+z^2 = d^2$ ec. $(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2 = f^2$ ec. si vede a colpo d'occhio risultarne il valore del D^2 nella Proposizione espresso.

52. *Scolio.* Questo valore può esporsi più concisamente così

$$D^2 = \frac{\Sigma . Pd^2}{\Sigma . P} - \frac{\Sigma . PQf^2}{(\Sigma . P)^2}$$

disegnando $\Sigma . Pd^2$ la somma di tutti i prodotti che nascono moltiplicando ciascuna forza pel quadrato

(*) Lagrange, *Mém. de l'Acad. de Berlin* 1783.

della sua distanza dal punto O, e $\Sigma . PQf^2$ la somma di tutti i prodotti che nascono moltiplicando le forze a due a due, ed il loro prodotto pel quadrato della distanza de' loro punti d'applicazione.

53. *Corollario I.* Riferendo la posizione de' punti A, B, C ... successivamente a tre punti o termini fissi, e conosciute per mezzo del Teorema precedente le distanze D, D', D'' del centro delle forze da questi tre punti, è chiaro che la posizione di esso centro sarà pienamente determinata.

Che se i punti del sistema sono tutti in un piano, basterà riferirli a due termini fissi. E se sono tutti in una linea retta, basterà riferirli ad un solo.

Si ponno prendere i termini fissi ne' punti medesimi del sistema, ed allora la posizione del centro resta determinata mediante la sola cognizione delle distanze scambievoli de' punti del sistema.

54. *Momento* d'una forza rispetto d'un piano dicesi il prodotto di essa forza per la distanza del suo punto d'applicazione da esso piano.

Quel piano al quale si riportano i momenti di tutte le forze applicate al sistema, dicesi *piano de' momenti.*

Talora però questa stessa voce *momento* s'adopera a diverso significato, del che avvertiremo, quando occorra.

55. *Coroll. II.* In ogni sistema di forze parallele il momento della risultante rispetto d'un piano qualunque è uguale alla somma de' momenti delle componenti.

In fatti rispetto del piano y, z che può essere un piano qualunque, il momento della risultante è

$= X\,\Sigma\,.\,P$; e la somma de' momenti delle componenti è $= \Sigma\,.\,P\,x$. Ora queste due quantità sono uguali.

56. *Coroll. III.* Se il piano de' momenti passa pel centro delle forze parallele, la somma de' momenti delle forze è nulla.

57. *Coroll. IV.* Dalle cose sin qui dette si traggono le formole che determinano la risultante di più forze parallele, date le componenti o viceversa. Siano le forze parallele P, Q, R.... e condotto un piano qualunque attraverso le loro direzioni, sieno x, y; x', y'; x'', y''.... le coordinate de' punti pe' quali passano le forze P, Q, R.... Dicasi S la risultante, ed X, Y le coordinate di quel punto del piano per dove passa. Avremo le tre equazioni

$$S = P + Q + R....$$
$$S\,X = P.x + Q\,x' + R\,x''....$$
$$S\,Y = P\,y + Q\,y' + R\,y''....$$

Qui se date le componenti si cerca la risultante, si vede subito tante essere le incognite quante le equazioni, onde il problema è determinato: ma se data la risultante si vogliono le componenti, il problema è di sua natura indeterminato.

Volendosi che le componenti passino per dati punti del piano, saranno date le coordinate x, y; x', y'.... e rimarranno solo a determinarsi le componenti stesse P, Q, R.... Ove scorgesi facilmente che il problema riuscirà determinato allorchè i punti dati siano due; ovvero tre, ma che non giacciano nella stessa retta: il che prova ciò che abbiamo asserito sul fine del Capo precedente.

CAP. VII.

Del Centro di Gravità.

58. *Ipotesi.* Ogni particella elementare di materia è continuamente animata da una forza per cui viene spinta a cadere per una retta perpendicolare al piano tangente la superficie dell' acque stagnanti. Questa forza è sensibilmente eguale in tutte le particelle materiali, e costante in ciascuna. Per essa cadendo liberamente descrivono nel primo 1″ della discesa lo spazio di metri 4,9044.

Vedremo a suo luogo le prove di questa proposizione, e l' eccezioni cui va soggetta; per ora saremo contenti d' assumerla siccome ipotesi.

59. Dicesi questa forza *gravità;* il piano tangente la superficie dell' acque stagnanti dicesi *piano orizzontale*; la retta perpendicolare a questo piano dicesi *verticale.*

Le verticali non troppo distanti fra loro sono sensibilmente parallele, e perciò le direzioni della gravità comprese fra non lunghi intervalli ponno aversi come parallele.

60. *Peso o peso assoluto* d' un corpo è la risultante di tutte le forze di gravità che animano ciascuno de' suoi elementi. Questa risultante è eguale alla loro somma, e perciò il peso è proporzionale alla massa.

61. *Peso specifico* o *gravità specifica* d' un corpo è il rapporto del suo peso assoluto al suo volume. Quindi il peso specifico è proporzionale alla densità.

62. Sia la massa d'un corpo M, il volume V, la densità D, il peso assoluto P, il peso specifico G; e sia g la gravità. Avremo

$$(8)\ D=\frac{M}{V};\ (60)\ P=Mg;\ (61)\ G=\frac{P}{V}$$

onde fra cinque elementi indeterminati M, V, D, P, G conoscendone due, si conosceranno pure gli altri tre.

Si notino sopra tutto le equazioni $M=\frac{P}{g}$; $P=GV$, delle quali frequentissimo occorre l'uso nella soluzione de' quesiti meccanici.

63. *Centro di gravità* d'un corpo è il centro delle forze parallele di gravità che animano ciascuno de' suoi elementi. Il peso del corpo può intendersi (46) riunito e raccolto nel centro di gravità. In simil guisa centro di gravità d'un sistema di più corpi, è il centro de' pesi de' corpi componenti il sistema. Ognuno di questi pesi deve intendersi riunito nel centro di gravità del rispettivo corpo.

64. *Coroll.* Il centro di gravità può trovarsi meccanicamente, sospendendo il grave, o qualche suo modello per due punti diversi. L'intersezione delle verticali che passano pei punti di sospensione sarà il centro di gravità.

Geometricamente poi si trova coi metodi insegnati per trovare il centro delle forze parallele, agli art. 38. 48. 51.

Si suole ancora cercare il centro di gravità delle linee e figure geometriche, supponendo gli elementi loro gravi ed omogenei. Questa ricerca sarà l'oggetto de' tre Capi seguenti.

CAP. VIII.

Ricerca del centro di gravità delle linee e figure più semplici.

65. *Proposizione I.* Le linee o figure simmetriche attorno un punto, un asse, un piano hanno il loro centro di gravità in quel punto, in quell'asse, in quel piano.

66. *Proposizione II.* Il centro di gravità d'un triangolo trovasi ai due terzi della retta che da un angolo si conduca al punto di mezzo del lato opposto.

Sia (Fig. 9) il triangolo ABC. Divisi per metà due lati qualunque in D ed E si conducano dagli angoli opposti le rette AD, BE. Risolvendo il triangolo in trapezj elementari per via di rette parallele al lato BC, egli è chiaro che la retta AD che taglia per metà tutte queste rette, passa pei centri di gravità di tutti gli elementi del triangolo, e perciò ancora pel centro di gravità del triangolo stesso. Ma per egual ragione anche la retta BE passa pel centro di gravità del triangolo. Dunque questo centro è nell' intersezione G delle due rette AD, BE.

Ora congiunta DE, essa taglia i lati BC, AC in parti proporzionali; dunque è parallela ad AB, e i triangoli AGB, DGE sono simili. Quindi

$$AG : GD :: AB : DE :: BC : DC.$$

Ma BC è doppia di DC per costruzione. Dunque AG è doppia di GD, e per conseguenza $AG = \frac{2}{3} AD$.

67. *Coroll.* Per le due proposizioni precedenti potrà trovarsi il centro di gravità del perimetro o dell' area di un poligono qualunque, adoprandovi il metodo dell' art. 58 oppure quello dell' art. 48.

68. *Proposizione III.* Il centro di gravità d' una piramide triangolare trovasi ai tre quarti della retta che dal vertice si conduca al centro di gravità della base.

Sia (Fig. 10) la piramide $VABC$. Tirata AD che tagli per mezzo BC in D, e preso $AE = \frac{2}{3} AD$, sarà E il centro di gravità della base, o sia del triangolo ABC. Similmente congiunta VD, e preso $VF = \frac{2}{3} VD$, sarà F il centro di gravità della faccia triangolare BVC. Si congiungano VE, AF.

Ora risolvendo la piramide ne' suoi elementi per mezzo di piani paralleli alla base ABC, è manifesto che la retta VE passa pei centri di gravità di tutti gli elementi della piramide. Adunque il centro della piramide dee cadere sulla VE. Per egual ragione dee cadere sulla AF. Cadrà dunque nell' intersezione G delle rette VE, AF.

Ma congiunta EF, questa divide i lati AD, VD in parti proporzionali; dunque è parallela ad VA, e i triangoli AGV, FGE sono simili. Quindi

$$VG : GE :: VA : FE :: AD : DE.$$

Ma AD è tripla di DE per costruzione. Dunque VG è tripla di GE, e però $VG = \frac{3}{4} VE$.

69. *Corollario I.* Questa proposizione si estende ad una piramide qualunque ed al cono.

Imperocchè condotta una retta dal vertice al centro di gravità della base, è manifesto in primo luogo che il centro della piramide dee trovarsi su questa retta, passando essa per tutti i centri degli infiniti elementi ne' quali la piramide si risolvesse mediante piani paralleli alla base.

Intendasi ora la base della piramide divisa in triangoli per via di diagonali, e la piramide stessa divisa in altrettante piramidi triangolari con piani condotti pel vertice e per queste diagonali. Se conduco un piano parallelo alla base della piramide, ed ai tre quarti della sua altezza, contando dal vertice, questo piano passerà (68) per tutti i centri delle piramidi triangolari. Dovrà dunque passare anche pel centro della piramide data: il quale per conseguenza si troverà ai tre quarti della retta che unisce il vertice col centro di gravità della base.

E ciò vale per quante siano le faccie della piramide; dunque ancora per la piramide ad infinite faccie, o sia pel cono.

70. *Coroll. II.* Di qui può trovarsi il centro di gravità d' un poliedro qualunque, potendosi ogni poliedro risolvere in piramidi.

CAP. IX.

Formole pel centro di gravità delle linee e de' piani.

71. Proposizione *I.* Pel centro di gravità d' un arco curvilineo s, essendo le coordinate x, y hassi

$$X = \frac{\int x\, d s}{s}, \quad Y = \frac{\int y\, d s}{s}.$$

In fatti abbiamo generalmente (50)

$$X = \frac{\Sigma . P x}{\Sigma . P}; \quad Y = \frac{\Sigma . P y}{\Sigma . P}.$$

Ora qui la forza P è proporzionale all'elemento dell' arco, che è $d\,s$. Dunque ec.

72. *Corollario I.* Se l'arco è simmetrico attorno l' asse delle x, il centro cade su quest' asse, Y s' annulla, e basta l' equazione $X = \frac{\int x\,d\,s}{s}$.

73. *Coroll. II.* Se l' arco fosse a doppia curvatura, converrebbe riferirne la posizione a tre assi, e sarebbe

$$X = \frac{\int x\,d\,s}{s}; \quad Y = \frac{\int y\,d\,s}{s}; \quad Z = \frac{\int z\,d\,s}{s}.$$

74. *Coroll. III.* Applicando queste formole alla ricerca del centro di gravità d' un arco di circolo, trovasi questo centro sul raggio che divide l' arco per metà, e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l' arco, la sua corda, ed il raggio.

75. *Proposizione II.* Pel centro di gravità d' una superficie piana, trovasi

$$X = \frac{\int x y\,d x}{\int y\,d x}; \quad Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,d x}{\int y\,d x}.$$

Si dimostra come sopra, osservando che l' elemento della superficie è $= y\,d\,x$.

Basterebbe la prima delle due equazioni, se la superficie proposta fosse simmetrica attorno la linea delle x.

76. *Corollario.* Ponno servir d' esercizio le applicazioni seguenti:

1. Un trapezio di basi parallele ha il suo

centro di gravità sulla retta che biseca le basi. Siano le basi p, q; ed a la retta che le taglia per mezzo. Su questa retta l'intervallo tra il centro di gravità e la base p è $=\frac{a}{3}.\frac{p+2q}{p+q}$.

2. Un segmento di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo; e la sua distanza dal centro del circolo è $\frac{1}{12}$ del cubo della corda, diviso per l'area del segmento.

3. Un settore di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo; e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco, la sua corda, e li $\frac{2}{3}$ del raggio.

CAP. X.

Formole pel centro di gravità delle superficie e de' solidi di rivoluzione.

77. *Proposizione I.* Il centro di gravità d'una superficie curva di rivoluzione è sull'asse alla distanza dell'origine

$$X=\frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}.$$

Questo valore si deduce agevolmente, osservando che l'elemento della superficie è $=2\pi y\,ds$, detto π il rapporto della circonferenza al diametro.

78. *Corollario.* Il centro di gravità d'una calotta, o d'una zona sferica è nel punto di mezzo della saetta.

79. *Proposizione II.* Il centro di gravità d' un solido di rivoluzione è sull' asse alla distanza dall'origine

$$X = \frac{\int x y^2 d x}{\int y^2 d x}.$$

Il qual valore agevolmente ricavasi, avvertendo che l'elemento del solido è $= \pi y^2 d x$.

80. *Corollario.* Applicando questa formola a rintracciare il centro di gravità di varj solidi, s' incontrano i risultati seguenti; si noti che le ascisse si prendono dal vertice della curva che rotando genera il solido.

1. Per un segmento sferico di raggio a

$$X = \frac{8 a - 3 x}{12 a - 4 x} . x$$

2. Per un settore sferico

$$X = \frac{1}{8} (2 a + 3 x)$$

3. Per l'emisfero

$$X = \frac{5}{8} a$$

4. Per un segmento di paraboloide

$$X = \frac{2}{3} x$$

5. Per un segmento d'ellissoide chiamando a il semiasse di rivoluzione, viene come pel segmento sferico

$$X = \frac{8 a - 3 x}{12 a - 4 x} . x$$

6. Per un segmento d'iperboloide

$$X = \frac{8 a + 3 x}{12 a + 4 x} . x$$

Questo valore è sempre compreso fra li $\frac{2}{3}$ e li $\frac{3}{4}$ dell' ascissa x.

CAP. XI.

Uso del centro di gravità per la misura delle superficie e de' solidi di rivoluzione.

81. *Proposizione I.* La superficie generata dalla rivoluzione d' un arco è uguale all' arco stesso moltiplicato pel viaggio del suo centro di gravità.

Il centro di gravità descrive una circonferenza di raggio Y; quindi il suo viaggio è $= 2\pi Y$. Ora (71) $Y = \frac{\int y\, ds}{s}$. Dunque il viaggio del centro di gravità dell'arco moltiplicato per l'arco stesso è $= 2\pi \int y\, ds$; che è appunto il noto valore della superficie generata dalla rotazione dell'arco s attorno l'asse delle x.

82. *Coroll.* Se più archi si avvolgono attorno un asse comune; la somma o la differenza delle superficie da essi generate è uguale alla somma o alla differenza degli archi stessi moltiplicata pel viaggio del comune loro centro di gravità.

Sieno gli archi s, s', s''.... e le ordinate de' loro centri di gravità v, v', v''.... Le superficie da essi generate saranno (81) $2\pi s v$, $2\pi s' v'$....e la loro somma $2\pi\,(s v + s' v' \ldots)$

Il centro di gravità comune di tutti gli archi avrà per ordinata (48) $\frac{s v + s' v' + s'' v'' \ldots}{s + s' + s'' \ldots}$, e però

moltiplicando il viaggio di questo centro comune per la somma degli archi stessi $s + s' + s'' \ldots$ risulterà $2\pi (s v + s' v' + s'' v'' \ldots)$ Dunque ec. Vale lo stesso discorso per la differenza.

83. *Proposizione. II.* Il solido generato dalla rivoluzione d'una superficie piana, è uguale alla superficie stessa moltiplicata pel viaggio del suo centro di gravità.

Qui abbiamo (75) $Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 \, dx}{\int y \, dy}$. Dunque la superficie moltiplicata pel viaggio del centro di gravità è $= \pi \int y^2 \, dx$, nota espressione del solido generato.

84. *Corollario.* E se attorno lo stesso asse girino più superficie, la somma o la differenza de' solidi da esse prodotti eguaglia la somma o la differenza delle superficie stesse moltiplicata pel viaggio del comune loro centro di gravità.

85. *Proposizione III.* Se una retta si move in guisa che rimanga sempre perpendicolare alla linea descritta dal suo centro di gravità, la superficie generata dal moto di questa retta è uguale alla retta medesima moltiplicata pel viaggio del suo centro di gravità.

E lo stesso vale d'un piano che movendosi alla guisa indicata generi un solido.

In fatti ogni elemento della superficie o del solido generato sarà uguale al prodotto della retta o della superficie generatrice per l'elemento corrispondente dalla linea percorsa dal centro di gravità.

CAP. XII.

Modo di trovare per approssimazione le superficie, le solidità, e i centri di gravità delle figure, delle quali non abbiasi l' equazione.

86. Qualora d'una proposta curva non abbiasi l'equazione, nè il valore delle figure terminate da essa curva o generate dal suo ravvolgimento, nè il sito de' loro centri di gravità non può aversi altrimenti che per via d'approssimazione. Il mezzo d'approssimazione più ovvio consiste nel segnar molte ordinate a brevi ed eguali intervalli, e considerar poscia gli archetti compresi come rettilinei, trasformando così la curva in un poligono. Si ottiene però maggiore accuratezza senza maggior fatica di calcolo, considerando invece quegli archetti siccome altrettanti archi parabolici, giusta l'ingegnoso metodo immaginato da Simpson. Qui ne raccoglieremo i risultati (*) lasciando agli studiosi la cura di rintracciarne la dimostrazione con vantaggioso esercizio di calcolo.

87. *Proposizione I.* Sia proposto di misurare (Fig. 11) il piano $XLL'X'$.... Condotto a traverso un asse qualunque AS, si divida in un numero pari di parti eguali AP, PQ, QR.... e pei punti di divisione si conducano le ordinate AL, PM, QN.... per-

(*) Prony, *Architect. Hydraul.* Tom. I, § 223.

pendicolari all'asse. Chiamerò $AP = PQ = QR \ldots = h$; ed $AL = y_1$, $PM = y_2$, $QN = y_3 \ldots$ L'area $ALXS$ sarà espressa da questa formola

$$\frac{1}{3} h \left\{ y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 \ldots + y_n \right\}$$

In simil guisa si troverà l' area $AL'X'S$, onde aggiungerla alla precedente; e se la curva inferiore $L'X'$ fosse eguale alla superiore LX e similmente situata rispetto dell' asse, basterà in tal caso raddoppiare il valore trovato dell' area $ALXS$.

L' esposta formola è dedotta dal supposto che l' arco LMN sia un arco di parabola avente per diametro MP, e l' arco NOX un arco di parabola avente per diametro OR, e così gli altri: supposto che non può trarre ad error notabile, quando quegli archi sian piccoli.

88. *Coroll. I.* In simil guisa per un solido terminato da una superficie curva qualunque, chiamando s_1, s_2, $s_3 \ldots$ le aree delle sezioni fatte perpendicolarmente all' asse AS, sarà la solidità

$$\frac{1}{3} h \left\{ s_1 + 4s_2 + 2s_3 + 4s_4 + 2s_5 + 4s_6 \ldots + s_n \right\}$$

89. *Coroll. II.* Se il solido è prodotto dalla rivoluzione della curva LX attorno l' asse AS, avremo $s = \pi y^2$; onde l' espressione della solidità diviene

$$\frac{\pi}{3} h \left\{ y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2 + 4y_4^2 + 2y_5^2 + 4y_6^2 \ldots + y_n^2 \right\}$$

90. *Scolio.* Se in vece di riguardare gli archi LMN, $NOX \ldots$ come parabolici, si fossero considerati gli archetti LM, MN, NO, $OX \ldots$ come altrettanti latercoli rettilinei, avremmo ottenuto

pel valore dell' area $ALXS$ l'espression seguente

$$\frac{1}{2}h\left\{y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6\ldots\ldots+yn\right\}.$$

e simili sarebbero state l'espressioni della solidità.

91. *Proposizione II.* Sia $XLL'X'$ una superficie terminata da due curve eguali e simili LX, $L'X'$ e divisa per mezzo dell' asse AS. Il di lei centro di gravità cade sull' asse AS ad una distanza dal punto A espressa dalla formola seguente

$$h\frac{0\cdot y_1+1\cdot 4y_2+2\cdot 2y_3+3\cdot 4y_4-4\cdot 2y_5\ldots\ldots+(n-1)yn}{y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5\ldots\ldots+yn}$$

92. *Corollario.* Simile è l' espressione per un solido simmetrico attorno l' asse AS, purchè invece delle ordinate $y_1, y_2\ldots.$ si pongano le sezioni $s_1, s_2\ldots.$ fatte perpendicolarmente all' asse; se poi è solido di rivoluzione, le suddette sezioni saranno rappresentate per πy_1^2, $\pi y_2^2\ldots.$

93. *Scolio.* Che se le curve LX si fossero riguardate come poligoni coi latercoli LM, $MN\ldots.$ la formola sarebbe stata la seguente (*)

$$\frac{1}{3}h\cdot\frac{y_1+1\cdot 6y_2+2\cdot 6y_3+3\cdot 6y_4+4\cdot 6y_5\ldots\ldots+(3n-4)yn}{y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5\ldots\ldots\ldots+yn}$$

(*) Bezout, *Cours de Math. pour la Marine.* Tom IV, § 299.

CAP. XIII.

Dell' equilibrio delle forze concorrenti in un punto.

94. PROPOSIZIONE *I.* Sia un punto o elemento materiale libero sollecitato da quante si vogliano forze. Se la risultante di queste forze sarà nulla, vi sarà equilibrio; e viceversa.

95. *Coroll. I.* Ridotte le forze tutte a tre sole (31) P, Q, R parallele a tre assi ortogonali, dovrà essere $\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)} = 0$; e quindi $P = 0, Q = 0, R = 0$.

96. *Coroll. II.* Siano in equilibrio attorno il punto A (Fig. 12) quante forze si vuole, espresse dalle rette AB, AC, AD ec. Sarà A il centro di gravità de' punti B, C, D ec. considerando questi punti siccome aggravati da pesi uguali.

Dim. Riferendo il sistema de' punti A, B, C ec. a tre assi ortogonali, siano X, Y, Z le coordinate del punto A; x, y, z quelle del punto B. La forza AB essendo per ipotesi espressa dalla retta AB, sarà $= \sqrt{\left\{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2\right\}}$ e risolvendola in tre forze parallele a' tre assi, queste tre componenti saranno $x - X, y - Y, z - Z$. Egualmente la forza AC si risolverà nelle tre $x' - X$, $y' - Y$, $z' - Z$; e la forza AD nelle tre $x'' - X$, $y'' - Y$, $z'' - Z$ ec. Sia n il numero di queste forze equilibrate AB, AC, AD ec. Dovrà essere (95)

$$P = x + x' + x'' \ldots . - nX = 0$$
$$Q = y + y' + y'' \ldots . - nY = 0$$
$$R = z + z' + z'' \ldots . - nZ = 0$$

Sono dunque le coordinate del punto A queste tre

$$X=\frac{x+x'+x''\ldots}{n};\ Y=\frac{y+y'+y''\ldots}{n};\ Z=\frac{z+z'+z''\ldots}{n}$$

che sono per l' appunto (48) le coordinate del centro di gravità de' punti B, C, D ec.

Convertendo il discorso apparirà reciprocamente, che se il punto A sarà il centro di gravità de' punti B, C, D ec. sollecitato quel punto dalle forze AB, AC, AD ec. si rimarrà in equilibrio.

97. *Coroll. III.* Di qui i Teoremi seguenti. Se un punto è posto nel centro di gravità d' un triangolo, e sollecitato da tre forze espresse dalle rette terminate a' vertici del triangolo, resterà in equilibrio.

E similmente se un punto è posto nel centro di gravità d' una piramide triangolare, e sollecitato da quattro forze espresse dalle rette terminate a' quattro vertici della piramide, resterà in equilibrio.

Imperocchè è facile dimostrare che il centro di gravità d'un triangolo, o d' una piramide triangolare, è anche centro di gravità di pesi uguali collocati ne' vertici loro.

98. *Scolio I.* Se il punto nel quale concorron le forze è fermato ad un appoggio che non gli permetta veruna sorte di moto, sussisterà l' equilibrio per quante siano le forze sollecitanti; e l' appoggio sarà premuto o tratto con tanta forza, quanta è la risultante delle forze applicate.

99. *Scolio II.* Se il punto è sospeso da un fulcro per mezzo d' una verga, richiedesi per l' equilibrio che la risultante delle forze applicate passi pel fulcro. Che se pendesse da un filo, si esige di più che

quella risultante non sospinga il punto contro del fulcro, ma in direzione contraria. Quanta è poi la risultante, tanta è la forza che tende il filo o la verga; e tanta pur è la pressione che il fulcro sostiene.

100. *Proposizione II.* Sia il punto o elemento materiale appoggiato ad una superficie resistente. Se la risultante delle forze ad esso punto applicate sarà perpendicolare a quella superficie, e sospingerà il punto contro la medesima, vi sarà equilibrio, e viceversa.

Volendosi esprimere analiticamente la condizione del dover essere la risultante perpendicolare alla superficie, fa d'uopo premettere il seguente Lemma geometrico.

101. *Lemma.* Sia una superficie determinata dall'equazione $l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$, ed al punto cui corrispondono le coordinate x, y, z si guidi una retta k normale alla superficie. Chiamando α, β, γ gli angoli che fa questa normale colle x, y, z e facendo per brevità $l^2 + m^2 + n^2 = M^2$, sarà

$$\cos.\ \alpha = \frac{l}{M};\quad \cos.\ \beta = \frac{m}{M};\quad \cos.\ \gamma = \frac{n}{M}.$$

Dim. Siano a, b, c le coordinate dell'estremità della retta k, mentre x, y, z sono le coordinate dell'altra estremità posta sulla superficie. Sarà

$$k^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

onde $k\,dk = (x - a)\,dx + (y - b)\,dy + (z - c)\,dz$.
Ma $x - a = k \cos.\alpha$; $y - b = k \cos.\beta$; $z - c = k \cos.\gamma$.
Dunque $dk = dx \cos.\alpha + dy \cos.\beta + dz \cos.\gamma$.

Ora se k è normale alla superficie, dovrà esser

la massima o la minima tra quelle che partendo dal punto determinato dalle coordinate a, b, c terminano alla superficie. Dunque dovrà essere $dk = 0$, o sia $dx \cos. \alpha + dy \cos. \beta + dz \cos. \gamma = 0$; la qual equazione combinata coll' altra
$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$, eliminandone dx, dà
$(l \cos. \beta - m \cos. \alpha)\,dy + (l \cos. \gamma - n \cos. \alpha)\,dz = 0$.
Quest' equazione dee verificarsi qualunque siano le variazioni dy, dz; onde avremo le due equazioni $l \cos. \beta - m \cos. \alpha = 0$, $l \cos. \gamma - n \cos. \alpha = 0$, le quali insieme colla terza (28) $\cos. \alpha^2 + \cos. \beta^2 + \cos. \gamma^2 = 1$, daranno i tre annunciati valori di $\cos. \alpha$, $\cos. \beta$, $\cos. \gamma$.

102. *Corollario*. Dunque se la risultante S delle forze applicate al punto materiale dev' essere perpendicolare alla superficie, risolvendola in tre forze P, Q, R parallele alle x, y, z dovrà essere

$$P = S \cos. \alpha = \frac{lS}{M};\; Q = S \cos. \beta = \frac{mS}{M};\; R = S \cos. \gamma = \frac{nS}{M}$$

e così $\qquad P : Q : R :: l : m : n$.

È chiaro che la risultante S viene elisa dalla resistenza della superficie, e rappresenta la pressione che la superficie stessa sostiene.

CAP. XIV.

Del momento di rotazione.

103. Sia un sistema di forma invariabile volubile intorno un asse, e ad alcun de' suoi punti sia applicata una forza che agisca in un piano perpendicolare a quell' asse. Il prodotto della forza per la distanza della sua direzione dall' asse di rotazione

dicesi *Momento della forza per far girare il sistema attorno l' asse.*

Sia la forza AP (Fig. 13) in un piano perpendicolare all' asse Oo. Condotta in quel piano la AM perpendicolare ad AP, il prodotto $AP \,.\, AM$ è il momento della forza AP per aggirare il sistema attorno l' asse Oo.

104. *Scolio.* Se la forza AP giacesse in un piano obbliquo all' asse Oo, convien risolverla in due, delle quali la prima sia parallela ad Oo, la seconda giaccia in un piano perpendicolare ad Oo. Questa seconda è la sola che tenda ad aggirare il sistema attorno l' asse; ed il momento di questa prendesi per momento della forza AP.

105. *Proposizione.* Sia un sistema rigido volubile attorno un asse, e siano applicate al sistema due forze che tendano ad aggirarlo in sensi contrarj. Se i momenti delle due forze saranno eguali, vi sarà equilibrio; e viceversa.

Siano le due forze AP, BQ tendenti ad aggirare il sistema attorno l' asse Oo in sensi contrarj co' momenti eguali $AP \,.\, AM$, $BQ \,.\, BN$. Queste agiranno (104) in piani perpendicolari all' asse Oo, e perciò tra di loro paralleli. Condotto per l'asse Oo un piano qualunque, siano Ma, Nb le comuni sezioni di questo piano coi due piani paralleli aMA, bNB ne' quali giacciono le forze AP, BQ. Prendo Ma, Nb eguali rispettivamente alle rette MA, NB. All' estremo a della retta Ma intendo applicate perpendicolarmente due forze opposte ap, ap' eguali fra loro, ed alla AP, e poste nel piano aMA. E similmente all' estremo della Nb

centro di gravità sulla retta che biseca le basi. Siano le basi p, q; ed a la retta che le taglia per mezzo. Su questa retta l'intervallo tra il centro di gravità e la base p è $= \frac{a}{3} \cdot \frac{p+2q}{p+q}$.

2. Un segmento di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo; e la sua distanza dal centro del circolo è $\frac{1}{12}$ del cubo della corda, diviso per l'area del segmento.

3. Un settore di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo; e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco, la sua corda, e li $\frac{2}{3}$ del raggio.

CAP. X.

Formole pel centro di gravità delle superficie e de' solidi di rivoluzione.

77. *Proposizione I.* Il centro di gravità d'una superficie curva di rivoluzione è sull'asse alla didistanza dell'origine

$$X = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}.$$

Questo valore si deduce agevolmente, osservando che l'elemento della superficie è $= 2\pi y\,ds$, detto π il rapporto della circonferenza al diametro.

78. *Corollario.* Il centro di gravità d'una calotta, o d'una zona sferica è nel punto di mezzo della saetta.

equilibrio, è necessario che i momenti delle forze applicate siano eguali fra loro. Il che ec.

106. *Coroll. I.* Scorgesi dalla dimostrazione precedente, che per quanto riguarda l'equilibrio di rotazione attorno l'asse Oo, alle forze AP, BQ ponno sostituirsi delle altre come ap, bq eguali alle prime, ma con direzioni comunque diverse, purchè queste direzioni giacciano sempre in piani perpendicolari all' asse Oo, e conservino la stessa distanza dall' asse. Col qual mezzo le dette forze ponno rendersi tutte fra loro parallele.

107. *Coroll. II.* Si può ancora, salvo l'equilibrio di rotazione, alla forza AP sostituirne un' altra $\alpha\pi$ di valor diverso, cangiandone la distanza dall' asse; basta che sia $AP \, . \, AM = \alpha\pi \, . \, \alpha M$ onde si conservi lo stesso momento.

108. *Coroll. III.* Agiscano sul sistema più forze tendenti ad aggirarlo in sensi contrarj. Se la somma de' momenti di quelle che tendono a girarlo per un verso sarà eguale alla somma de' momenti di quelle che tendono a girarlo in contrario, vi sarà equilibrio; e viceversa.

Si riducano tutte le forze ad essere fra loro parallele (106); indi tutte quelle che tendono a giraré il sistema per lo stesso verso si riducano alla loro risultante P applicata al loro centro; e sia il momento di questa forza Pm. Similmente quelle che tendono in senso contrario si riducano ad una Q applicata al loro centro, e siane il momento Qn. Sarà (55) Pm la somma de' momenti delle prime, e Qn la somma de' momenti delle seconde. Dunque per ipotesi $Pm = Qn$. Dunque (105) vi sarà equilibrio.

CAP. XV.

Proprietà principali de' Momenti di rotazione.

109. *Lemma. I.* Costituiti pel punto O (Fig. 14) tre assi ortogonali OX, OY, OZ, e poscia per lo stesso punto condotti altri tre assi ortogonali OX', OY', OZ' ciascheduno de' quali faccia co' tre primi rispettivamente gli angoli α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; si avranno queste sei equazioni

$$\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$$
$$\cos.\alpha'^2 + \cos.\beta'^2 + \cos.\gamma'^2 = 1$$
$$\cos.\alpha''^2 + \cos.\beta''^2 + \cos.\gamma''^2 = 1$$
$$\cos.\alpha\cos.\alpha' + \cos.\beta\cos.\beta' + \cos.\gamma\cos.\gamma' = 0$$
$$\cos.\alpha\cos.\alpha'' + \cos.\beta\cos.\beta'' + \cos.\gamma\cos.\gamma'' = 0$$
$$\cos.\alpha'\cos.\alpha'' + \cos.\beta'\cos.\beta'' + \cos.\gamma'\cos.\gamma'' = 0$$

Le prime tre risultano dall' art. 28. Le tre seguenti dal Teorema dimostrato all'art. 32. Pel quale abbiamo

$$\cos.X'OY' = \cos.\alpha\cos.\alpha' + \cos.\beta\cos.\beta' + \cos.\gamma\cos.\gamma'$$
$$\cos.X'OZ' = \cos.\alpha\cos.\alpha'' + \cos.\beta\cos.\beta'' + \cos.\gamma\cos.\gamma''$$
$$\cos.Y'OZ' = \cos.\alpha'\cos.\alpha'' + \cos.\beta'\cos.\beta'' + \cos.\gamma'\cos.\gamma''$$

Ma per ipotesi gli angoli $X'OY'$, $X'OZ'$, $Y'OZ'$ sono retti, e i loro coseni eguali a zero. Dunque ec.

110. *Corollario.* Se da prima si considerino gli assi OX', OY', OZ' e poscia gli altri OX, OY, OZ ciascuno de' quali fa co' tre primi gli angoli α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ''; vedesi che insieme

In fatti abbiamo generalmente (50)

$$X = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P}; \quad Y = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P}.$$

Ora qui la forza P è proporzionale all'elemento dell'arco, che è $d\,s$. Dunque ec.

72. *Corollario I.* Se l'arco è simmetrico attorno l'asse delle x, il centro cade su quest'asse, Y s'annulla, e basta l'equazione $X = \frac{\int x\,d\,s}{s}$.

73. *Coroll. II.* Se l'arco fosse a doppia curvatura, converrebbe riferirne la posizione a tre assi, e sarebbe

$$X = \frac{\int x\,d\,s}{s}; \quad Y = \frac{\int y\,d\,s}{s}; \quad Z = \frac{\int z\,d\,s}{s}.$$

74. *Coroll. III.* Applicando queste formole alla ricerca del centro di gravità d'un arco di circolo, trovasi questo centro sul raggio che divide l'arco per metà, e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco, la sua corda, ed il raggio.

75. *Proposizione II.* Pel centro di gravità d'una superficie piana, trovasi

$$X = \frac{\int x y\,d x}{\int y\,d x}; \quad Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,d x}{\int y\,d x}.$$

Si dimostra come sopra, osservando che l'elemento della superficie è $= y\,d\,x$.

Basterebbe la prima delle due equazioni, se la superficie proposta fosse simmetrica attorno la linea delle x.

76. *Corollario.* Ponno servir d'esercizio le applicazioni seguenti:

1. Un trapezio di basi parallele ha il suo

centro di gravità sulla retta che biseca le basi. Siano le basi p, q; ed a la retta che le taglia per mezzo. Su questa retta l'intervallo tra il centro di gravità e la base p è $= \frac{a}{3} \cdot \frac{p+2q}{p+q}$.

2. Un segmento di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo; e la sua distanza dal centro del circolo è $\frac{1}{12}$ del cubo della corda, diviso per l'area del segmento.

3. Un settore di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo; e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco, la sua corda, e li $\frac{2}{3}$ del raggio.

CAP. X.

Formole pel centro di gravità delle superficie e de' solidi di rivoluzione.

77. *Proposizione I.* Il centro di gravità d'una superficie curva di rivoluzione è sull'asse alla distanza dell'origine

$$X = \frac{\int x y ds}{\int y ds}.$$

Questo valore si deduce agevolmente, osservando che l'elemento della superficie è $= 2\pi y ds$, detto π il rapporto della circonferenza al diametro.

78. *Corollario.* Il centro di gravità d'una calotta, o d'una zona sferica è nel punto di mezzo della saetta.

$A\,O\,B$ sul piano $X\,O\,Y$. Condotte le ordinate $Q\,P$, $Q'\,P'$ avremo

$O\,P = x$, $P\,Q = y$, $O\,P' = x + P$, $P'\,Q' = y + Q$.

Ora il triangolo $QOQ' = POQ + PQQ'P' - P'OQ'$.

Ma $P\,O\,Q = \frac{1}{2}xy$; $P\,Q\,Q'P' = \frac{1}{2}PP'(PQ + P'Q') = \frac{1}{2}P\,(2y + Q)$; $P'\,O\,Q' = \frac{1}{2}(x + P)\,(y + Q)$.

Dunque $Q\,O\,Q' = \frac{1}{2}\,(P\,y - Q\,x)$. Allo stesso modo si troveranno le altre due projezioni.

114. *Coroll. I.* I momenti della forza $A\,B$ per far girare il sistema attorno gli assi $O\,Z$, $O\,Y$, $O\,X$ sono proporzionali alle projezioni dell' area $A\,O\,B$ sui tre piani $X\,O\,Y$, $X\,O\,Z$, $Y\,O\,Z$; essendo ciascuno de' suddetti momenti doppio della corrispondente projezione.

In fatti la forza AB risoluta nelle tre P, Q, R tende a far girare il sistema attorno l' asse $O\,Z$ da Y verso X col momento $P\,y$, e da X verso Y col momento $Q\,x$. Adunque il momento della forza AB per far girare il sistema attorno l' asse $O\,Z$ pel verso $Y\,X$ è $= P\,y - Q\,x$. Allo stesso modo si vedrà che il momento della forza $A\,B$ per volgere il sistema attorno $O\,Y$ pel verso XZ è $= Rx - Pz$; e che il momento di essa forza per volgere il sistema attorno $O\,X$ pel verso $Z\,Y$ è $= Q\,z - R\,y$.

Sono dunque i tre momenti per volgere il sistema attorno gli assi OZ, OY, OX pel verso YXZ

$$P\,y - Q\,x,\quad R\,x - P\,z,\quad Q\,z - R\,y.$$

Ma le tre projezioni dell'area $A\,O\,B$ sui piani $X\,O\,Y$, $X\,O\,Z$, $Y\,O\,Z$ sono (113)

$\frac{1}{2}(Py - Qx)$, $\frac{1}{2}(Rx - Pz)$, $\frac{1}{2}(Qz - Ry)$.

Dunque ec.

115. *Coroll. II.* E in un sistema di quante forze si vogliono, le somme de' momenti coi quali queste forze tendono a rotare il sistema attorno gli assi ortogonali OZ, OY, OX sono proporzionali alle somme delle projezioni di tante aree quante sono le forze, fatte su' piani XOY, XOZ, YOZ; essendo ciascuna somma de' momenti doppia della somma delle corrispondenti projezioni.

116. *Proposizione I.* Siano $F\,G\,H$, le somme de' momenti co' quali le forze applicate al sistema tendono a rotarlo attorno gli assi OX, OY, OZ; e siano F', G', H' le somme de' momenti delle stesse forze rispetto agli assi OX', OY', OZ' (109); sarà

$$F' = F \cos.\alpha + G \cos.\beta + H \cos.\gamma$$
$$G' = F \cos.\alpha' + G \cos.\beta' + G \cos.\gamma'$$
$$H' = F \cos.\alpha'' + G \cos.\beta'' + H \cos.\gamma''.$$

Dim. Chiamando A, A', A'' le somme delle projezioni di tutte le aree compagne della AOB sui piani YOZ, XOZ, XOY; e B, B', B'' le somme delle projezioni delle stesse aree sui piani $Y'OZ'$, $X'OZ'$, $X'OY'$; sarà (115)

$$A=\frac{1}{2}F, A'=\frac{1}{2}G, A''=\frac{1}{2}H;\ B=\frac{1}{2}F', B'=\frac{1}{2}G', B''=\frac{1}{2}H'.$$

Sostituendo questi valori di A ec. B ec. nelle equazioni (111) risultano quelle nella Proposizione espresse.

117. *Corollario.* Elevando queste equazioni al quadrato, facendone la somma, e riducendola coll'ajuto delle equazioni (109. 110) risulta

$$F'^2 + G'^2 + H'^2 = F^2 + G^2 + H^2.$$

Pertanto a qualunque terno d'assi ortogonali condotti per lo stesso punto si riportino i momenti delle forze, la somma de' loro quadrati è sempre la stessa.

118. *Proposizione. II.* I tre momenti F, G, H tendenti a rotare il sistema attorno i tre assi OX, OY, OZ equivalgono ad un momento unico $\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}$ che tende a farlo girare attorno un solo asse OX', che fa co' tre primi gli angoli che hanno per coseni

$$\frac{F}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}}, \frac{G}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}}, \frac{H}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}}$$

Dim. In fatti se ponghiamo

$$\cos.\ \alpha = \frac{F}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}},$$

$$\cos.\ \beta = \frac{G}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}},$$

$$\cos.\ \gamma = \frac{H}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}},$$

e cerchiamo per le formole precedenti il valore de' momenti F', G', H' rispetto all' asse OX' ed altri due ad esso ortogonali, abbiamo primiermente (116)

$$F' = \frac{F^2+G^2+H^2}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}} = \sqrt{(F^2+G^2+H^2}$$

Poscia (117) sarà

$$G'^2 + H'^2 = F^2 + G^2 + H^2 - F'^2 = 0$$

e quindi $G' = 0$, $H' = 0$. Dunque ec.

119. *Coroll. I.* Viceversa se le forze applicate al sistema tendono col momento M a muoverlo in giro attorno un asse il quale faccia gli angoli α, β, γ cogli assi ortogonali OX, OY, OZ; quel momento M equivarrà a tre momenti M cos. α,

$M \cos.\beta$, $M \cos.\gamma$ tendenti insieme ad aggirare il sistema attorno gli assi OX, OY, OZ rispettivamente.

120. *Corall. II.* Di qui apparisce che i diversi momenti che hanno le forze applicate ad un sistema per condurlo in giro attorno diversi assi ad un tempo, si compongono infra loro alla stessa guisa dalle forze applicate ad un punto. E così se sugli assi OX, OY, OZ si prenderanno dal punto O tre rette rispettivamente uguali ad F, G, H, cioè a' momenti delle forze per rapporto a' singoli assi, e si farà con questi lati F, G, H un parallelepipedo rettangolo, la diagonale condotta all' origine O sarà l' asse unico, attorno cui tenderà effettivamente a volgersi il sistema con momento espresso della diagonale medesima. In fatti sarà quella diagonale $\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}$ e farà coi tre assi OX, OY, OZ gli angoli de' coseni.

$$\frac{F}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}},\ \frac{G}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}},\ \frac{H}{\sqrt{(F^2+G^2+H^2)}}.$$

121. *Proposizione. III.* Dati i momenti F, G, H co' quali le forze applicate al sistema tendono ad aggirarlo intorno agli assi ortogonali OX, OY, OZ trovare i momenti f, g, h co' quali le stesse forze tendono ad aggirarlo attorno tre assi ortogonali paralleli a' primi, e condotti per un punto le cui coordinate siano a, b, c.

Per riportare i momenti delle forze a questi nuovi assi basta ne' valori de' momenti F, G, H in luogo delle coordinate x, y, z mettere $x-a$, $y-b$, $z-c$. Essendo dunque (114) $F = \Sigma . Qz = \Sigma . Ry$, sarà

$f = \Sigma . Q(z-c) - \Sigma . R(y-b) = F - c\Sigma . Q + b\Sigma . R$

E similmente avremo $g = G - a\Sigma . R + c\Sigma . P$

$h = H - b\Sigma . P + a\Sigma . Q$

Il che dovevasi trovare.

122. *Corollario.* Se sarà $\Sigma . P = 0$, $\Sigma . Q = 0$ $\Sigma . R = 0$, e se di più i momenti di rotazione attorno tre assi ortogonali siano uguali a zero, onde sia $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$; saranno eguali a zero anche i momenti di rotazione attorno qualunque asse immaginabile.

CAP. XVI.

Equilibrio d' un sistema di forma invariabile.

123. *Proposizione.* Sia un sistema rigido sollecitato da più forze, ognuna delle quali sia decomposta in tre P, Q, R parallele a tre assi ortogonali. Vi sarà equilibrio se 1.° le somme delle forze parallele a ciascuno de' tre assi saranno eguali a zero. 2.° le somme de' momenti delle forze per far girare il sistema attorno ciascuno de' tre assi saranno eguali a zero; e viceversa.

Dim. Le forze applicate al sistema si riducono a tre risultanti $\Sigma . P$, $\Sigma . Q$, $\Sigma . R$, ciascuna delle quali tende a trasportare tutto il sistema e ciascun punto del medesimo con moto progressivo parallelamente al rispettivo asse. Essendo dunque ognuna di queste risultanti eguale al zero, nessun punto del sistema (95) potrà concepire moto progressivo.

Essendo inoltre eguali a zero i momenti delle

forze per far girare il sistema attorno tre assi ortogonali, saranno pure eguali a zero (122) i momenti delle forze per farlo girare attorno qualunque asse immaginabile; e però il sistema non potrà concepire moto rotatorio.

Ma egli è palese che un sistema rigido non può spostarsi se non se per moto progressivo, o per moto rotatorio. Dunque ec.

E viceversa se v' ha equilibrio, è necessario che il sistema non possa concepir moto nè progressivo, nè rotatorio. Ma concepirebbe moto progressivo se alcuna delle somme $\Sigma . P$ ec. non fosse zero, e concepirebbe moto rotatorio se alcuno de' momenti riferiti a' tre assi non fosse zero. Dunque ec.

124. *Coroll. I.* Essendo come sopra ciascuna forza risoluta nelle tre P, Q, R ed essendo x, y, z le coordinate del suo punto d'applicazione, l'equilibrio del sistema è determinato da queste sei equazioni

$$\Sigma . P = 0; \quad \Sigma . Q = 0; \quad \Sigma . R = 0$$
$$\Sigma . Py = \Sigma . Qx; \quad \Sigma . Pz = \Sigma . Rx; \quad \Sigma . Qz = \Sigma . Ry$$

Le prime tre esprimono che il sistema non può concepir moto progressivo secondo veruno degli assi OX, OY, OZ. Le tre ultime esprimono che il sistema non può rotare attorno veruno de' tre assi OZ, OY, OX. E già si è dimostrato che impediti questi movimenti rimane escluso ogni movimento possibile.

125. *Coroll. II.* Se v' ha nel sistema un fulcro, o punto fisso, ogni moto progressivo viene impedito dalla resistenza del fulcro. Basterà pertanto che le forze P, Q, R non possano indurre alcun moto

rotatorio; basteranno dunque per l'equilibrio le tre equazioni

$$\Sigma . Py = \Sigma . Qx; \ \Sigma . Pz = \Sigma . Rx; \ \Sigma . Qz = \Sigma . Ry.$$

126. *Coroll. III.* Se vi sono due punti fissi, o sia un asse fisso, il che torna lo stesso, allora il sistema non può prender che un moto di rotazione attorno quell' asse. Prendendolo pertanto per asse delle z, basterà per l'equilibrio la sola equazione

$$\Sigma . Py = \Sigma . Q x.$$

CAP. XVII.

Pressioni sugli appoggi d' un sistema rigido equilibrato.

127. *Proposizione I.* Sia un sistema rigido equilibrato e sostenuto da un fulcro o pernio fisso. Tenendo ferme le denominazioni sino ad ora usate, le pressioni p, q, r che il pernio sostiene nel senso delle x, y, z sono determinate dall' equazioni

$$p = \Sigma . P; \quad q = \Sigma . Q; \quad r = \Sigma . R.$$

Difatti le pressioni che sostiene il fulcro sono eguali e contrarie a quelle forze che vi si dovrebbono applicare per mantener l' equilibrio nel caso che il fulcro si togliesse. Ora per le tre prime equazioni dell' equilibrio è manifesto che vi si dovrebbero applicare in senso contrario alle x, y, z, le forze $\Sigma . P$, $\Sigma . Q$, $\Sigma . R$.

128. *Corollario.* Il fulcro sostiene lo sforzo delle potenze P, Q, R come se queste gli fossero immediatamente applicate.

129. *Proposizione II.* Sia il sistema equilibrato attorno l'asse immobile OZ (Fig. 15) fisso in due punti o pernj M, N. Si chiamano p, q, r le pressioni che sostiene nel senso delle x, y, z il pernio M cui corrisponde l'ascissa $OM = \zeta$, e siano similmente p', q', r' le pressioni sostenute dall'altro pernio N cui corrisponde l'ascissa $ON = \zeta'$. I valori delle pressioni si hanno dalle cinque equazioni che seguono

$$\begin{aligned}
p + p' &= \Sigma . P \\
q + q' &= \Sigma . Q \\
r + r' &= \Sigma . R \\
p\zeta + p'\zeta' &= \Sigma . Pz - \Sigma . Rx \\
q\zeta + q'\zeta' &= \Sigma . Qz - \Sigma . Ry.
\end{aligned}$$

Difatti supponghiamo che per mantenere l'equilibrio, sciogliendo i punti M, N, e rendendo così libero il sistema, si dovessero applicare in senso contrario alle coordinate le forze p, q, r nel punto M, e le forze p', q', r' nel punto N. Cercando i valori di queste forze per le generali equazioni dell'equilibrio (124) incontriamo appunto le equazioni qui sopra scritte.

130. *Coroll. I.* La terza equazione fa conoscere che tutto l'asse è sospinto nel senso delle z con forza $= \Sigma . R$. Per le altre quattro poi agevolmente si determinano le pressioni che soffre ciaschedun degli appoggi nel senso delle x e delle y.

131. *Coroll. II.* Di qui può sciogliersi agevolmente il problema (*) pel quale si cercano gli sforzi

(*) *V.* Greg. Fontana, *Società Ital.* Tom. VIII. Part. I, pag. 135.

che esercita il peso d'una porta sui due cardini che la reggono; o più generalmente le pressioni esercitate su' due cardini M, N dell' asse da una forza parallela all'asse medesimo.

Sia la forza $= -R$; la distanza della sua direzione dall'asse $= x$; l' intervallo fra i due cardini $ME = \zeta' - \zeta$. Si troverà

$$r + r' = -R;\ p' = -p = \frac{Rx}{\zeta' - \zeta};\ q' = q = 0.$$

Così la porta grava di tutto il suo peso R la linea verticale de' cardini, ed oltre a ciò il cardine superiore è tratto in fuori, e l' inferiore è sospinto in dentro, entrambi con forza $= \frac{Rx}{\zeta' - \zeta}$.

CAP. XVIII.

Equilibrio d' un sistema rigido animato da forze parallele.

132. È proprietà d' un sistema rigido animato da forze parallele (46) il ridursi tutte le forze ad una risultante sola eguale alla somma di tutte, ed applicata al loro centro. Tale è un corpo grave; tale una massa le cui particelle tendano a moversi tutte con eguale velocità, e per linee parallele. In questi sistemi la determinazione delle condizioni e delle proprietà dell' equilibrio è per lo più assai facile, siccome vedremo scorrendo per alcuni casi.

133. *Proposizione I.* Una massa M di cui tutti gli elementi abbiano impressa la velocità V sia

contigua ad una massa m animata in tutti i suoi elementi della velocità u. Le direzioni delle velocità V, u siano parallele alla retta che congiunge i centri di gravità delle due masse, e siano fra loro opposte. Vi sarà equilibrio, se le masse M, m siano reciprocamente proporzionali alle velocità V, u; e viceversa.

In fatti tutte le forze che agiscono sulla massa M si riducono ad una sola applicata al suo centro di gravità ed uguale alla somma di tutte, e perciò eguale ad MV; e così quelle che agiscono sulla massa m si riducono ad una sola applicata al suo centro di gravità, ed $= mu$. Queste due forze essendo opposte, vi sarà equilibrio se sia $MV = mu$, ovvero $M : m :: u : V$; e viceversa.

Il prodotto della massa per la velocità comune colla quale tutti i suoi elementi si movono, o tendono a moversi, dicesi *quantità di moto*. Misurando questo prodotto la risultante di tutte le forze parallele che animano gli elementi della massa, misura ancora la forza della massa medesima.

134. *Proposizione II.* Un grave sospeso o sostenuto comunque da un punto fisso rimarrà in equilibrio, se la verticale condotta pel centro di gravità passa per quel punto; e viceversa.

135. *Proposizione III.* Un grave posato su d'un piano sarà in equilibrio se il piano è orizzontale, e se di più la verticale calata dal centro di gravità cade entro la base circoscritta dalle rette che congiungono i punti d'appoggio; e viceversa.

136. *Corollario I.* Mancando la prima condizione, il corpo striscerà radendo il piano: mancando

la seconda, roterà attorno quello fra gli appoggi, verso cui cade la perpendicolare calata dal centro di gravità.

137. *Coroll. II.* Il grave preme il piano con tutto il suo peso: se gli appoggi sono due, o anche tre, purchè non giacciano in linea retta, si determina facilmente (40. 42) qual parte del peso gravi ciascheduno degli appoggi; ma negli altri casi (44) il problema è indeterminato.

138. *Proposizione IV.* Reggasi un grave su due piani inclinati *C A*, *C B* (Fig. 16) posando sugli appoggi *A*, *B*. Vi sarà equilibrio se la verticale *C V* condotta pel centro di gravità del corpo giace fra i due punti *A*, *B* e passa pel concorso *P* delle perpendicolari *A P*, *B P* erette sui piani inclinati ne' punti *A*, *B*; e viceversa.

Poichè allora il peso del grave potrà intendersi applicato al punto *P* della verticale *G V*, e risolversi in due forze secondo *P A*, *P B*, le quali agendo perpendicolarmente contro i piani ne' punti d'appoggio, rimarranno sostenute (100).

E viceversa se v'ha equilibrio, è forza che le perpendicolari *A P*, *B P* concorrano in un punto della *G V*. Poichè se intendiamo rimossi i piani, ed in loro vece sostituite in *A*, *B* delle forze eguali e contrarie alle pressioni che il sangue esercitava sui piani stessi, deve sussister l'equilibrio fra il peso del corpo che agisce per la verticale *G V*, e queste due forze che agiscono secondo le rette *A P*, *B P*. Ora tre forze che non siano parallele non ponno essere in equilibrio, se le loro direzioni non concorrono in un punto; dovendo ciascuna delle forze

riuscire eguale ed opposta alla diagonale del parallelogrammo formato colle altre due.

139. *Coroll. I.* Le pressioni esercitate su ciascuno degli appoggi A, B si determinano facilmente. Sia P il peso del corpo, A, B le pressioni cercate. Sarà (17)

$$P : A : B :: \sin. APB : \sin. BPG : \sin. APG$$

o sia, condotta la verticale CZ,

$$P : A : B :: \sin. ACB : \cos. BCZ : \cos. ACZ.$$

140. *Coroll. II.* Se la verticale GV non passa per l'intersezione P delle perpendicolari AP, BP ma più verso l'un degli appoggi, per esempio verso A, il corpo sdrucciolerà fra i due piani, scendendo il punto A, ed alzandosi il punto B.

141. *Coroll. III.* Se il corpo posa sui piani non già in un punto solo, ma in più punti, o in una base estesa, per esempio, sulle basi ab, $\alpha\beta$, basterà per l'equilibrio che la verticale GV passi pel parallelogrammo $lmno$ compreso dalle perpendicolari erette su i due piani nei termini delle basi ab, $\alpha\beta$.

142. *Coroll. IV.* Che se l'uno degli appoggi fosse fermato in modo che non permettesse al corpo di scorrere lungo il piano, allora basterà per l'equilibrio che la verticale GV passi tra i due punti A, B.

Anche in questo caso la determinazione delle pressioni è facilissima; di che daremo un esempio recando la soluzione genuina del seguente Problema, che da diversi è stato sciolto diversameute (*).

(*) *Società Italiana*, Tom X, Part. I, p. 138.

143. *Coroll. V.* La trave AB (Fig. 17) s'appoggia coll' estremo A sul piano verticale AC e coll' altro B sul piano orizzontale BC, fermata in B da un ostacolo che le impedisce di strisciar lungo il piano. Si cercano le pressioni o spinte esercitate sugli appoggi A, B.

Pel centro di gravità G della trave ergasi la verticale GP che incontri in P l' orizzontale AP, e congiungasi PB. Il peso della trave suppongasi applicato in P, e si risolva nelle due forze Aa, Bb. Saranno queste le pressioni cercate.

Volendosi conoscere partitamente le spinte orizzontali e verticali esercitate dalla trave, di nuovo si decomponga la Bb nelle due BX, BZ la prima orizzontale, l' altra verticale. Intendendo ora rimossi gli appoggi, e poste in vece le loro forze Aa, BX, BZ volte in senso contrario, queste forze dovranno equilibrare il peso della trave, che chiamo P. Poichè il sistema è tutto in un piano, avremo dall' art. 124 tre sole equazioni

$$Aa = BX; \quad P = BZ$$

$$P.CT + Aa.CA = BZ.CB$$

Quindi
$$Aa = BX = \frac{P.BT}{CA}$$

Adunque il fulcro B è premuto verticalmente da tutto il peso della trave; esso poi, ed il punto A sono spinti orizzontalmente in direzioni opposte, con forza espressa da $\frac{P.BT}{AC}$.

Sia $AB = a$, $AG = b$, l' angolo $BAC = \phi$. Sarà la spinta orizzontale $\frac{P(a-b)}{a}$ tan. ϕ.

E se il centro di gravità cade nel mezzo della trave, la spinta riesce $= \frac{1}{2} P$ tan. ϕ.

CAP. XIX.

De' sistemi di forma variabile.

144. Quelle condizioni che assicurano l'equilibrio ne' sistemi rigidi non bastano ad assicurarlo ne' sistemi di forma variabile. In questi oltre il moto progressivo ed il rotatorio ponno aver luogo altri moti varj secondo la particolar forma e disposizione del sistema; il che richiede altre condizioni d'equilibrio dirette ad impedire tutti que' moti parziali de' quali ciascun punto è suscettibile. Il principio Galileano delle velocità virtuali si applica anche a' sistemi di forma variabile, e somministra le equazioni del loro equilibrio; ma la dimostrazione generale di questo principio, e la sua applicazione spesso difficile ci trarrebber fuori de' limiti d' un' istituzione elementare. E altronde per gli usi pratici basta la considerazione di alcuni particolari sistemi, pe' quali le leggi d' equilibrio si deducono agevolmente dalla decomposizione delle forze. Ci limiteremo pertanto ai poligoni, gli angoli de' quali possono aprirsi o serrarsi per l'azione delle forze ad essi applicate: o siano i lati flessibili o rigidi. Alla qual trattazione c' introdurrà la seguente Proposizione.

145. *Proposizione.* Concorrano nel nodo A (Fig. 18) due funi fisse co' loro capi ne' punti K, K' e tratte in A dalla forza P. Siano α, α' gli angoli che fa la direzione della forza P colle due funi, siccome

151. *Coroll. I.* Queste formole ci mostrano insieme i valori delle tensioni de' lati intermedj AB, BC, CD.

Quanto alle tensioni de' lati estremi si deduce dalle stesse analogie

$$T = \frac{P \sin. \alpha'}{\sin. (\alpha + \alpha')} ; \quad T' = \frac{S \sin. \delta}{\sin. (\delta + \delta')}$$

Se i termini K, K' del poligono non fossero fissi, per mantenere l' equilibrio si dovrebbono applicarvi le forze $Kt = T$, $K't' — T'$ nella dirittura de' lati estremi AK, DK'.

152. *Coroll. II.* Se le forze P, Q, R, S applicate a' vertici del poligono agissero tutte sopra uno stesso punto, e nello stesso punto agissero ancora le forze Kt, $K't'$, che rappresentano le tensioni de' lati estremi del poligono, tutte queste forze dovrebbono attorno quel punto equilibrarsi.

In fatti risolvendo le forze P, Q, R, S come poc' anzi abbiam fatto, ne provengono altrettante coppie di forze eguali tra loro ed opposte.

153. *Coroll. III.* Preso nel poligono equilibrato con punto qualunque, per esempio il punto C, la risultante di tutte le forze applicate al poligono dal suo principio K sino al punto C, è uguale alla tensione del lato CD che termina nel punto C.

In fatti la risultante delle forze Kt; T, X; X', Y; Y', Z per essere eguali ed opposte fra loro le forze Kt, T; X, X'; Y, Y' riducesi palesemente ad essere $= Z$, che è la tensione del lato CD.

154. *Coroll. IV.* Se le direzioni delle potenze P, Q, R, S tagliano per metà gli angoli corrispondenti del poligono, tutto il poligono è teso

ugualmente con forza espressa da qualunque delle potenze traenti divisa pel doppio coseno dell'angolo che essa fa colla fune alla quale è applicata.

155. *Coroll. V*. Se il poligono è chiuso e regolare, le forze traenti sono eguali; ciascuna di esse sta alla tensione del poligono, come sta il lato del poligono al raggio del circolo circoscritto; e la somma di tutte sta alla tensione del poligono; come sta il perimetro del poligono al suddetto raggio.

156. *Scolio*. Alle sopra dette condizioni d'equilibrio si vuole aggiunger quest' altra, che le forze applicate a' vertici del poligono traggano dall' indentro all'infuori, tendendo a distrarre ed allontanare tra loro i vertici stessi: mentre si suppongono i lati del poligono formati di fili o di corde, incapaci bensì d'allungarsi, ma ben capaci d' incurvarsi, accostandosi tra loro le estremità de' lati.

Che se i lati del poligono fossero altrettante spranghe inflessibili semplicemente appoggiate l'una contro l'altra senza giunture negli angoli, si richiederebbe per lo contrario, che le forze traessero dall'infuori all'indentro, sforzandosi di avvicinare fra loro i vertici stessi. Poichè all' avvicinamento ripugna la rigidezza de' lati, ma essa non vieta che i vertici non possano allontanarsi scambievolmente col disseparársi.

Se finalmente i lati del poligono saranno verghe rigide congiunte a cerniera negli angoli, in guisa che gli angoli possano bensì aprirsi o serrarsi, ma i termini de' lati non possano mutar distanza, sarà indifferente per l'equilibrio in quel senso agiscano le forze.

Frattanto egli è manifesto che quelle condi
che assicurano l' equilibrio del poligono di lati
sibili, assicureranno anche quello del poligonc
lati rigidi semplicemente addossati l' uno all' al
tanto solo che s'intenda rivolta in contrario la d
zione di tutte le forze.

CAP. XXI.

Del Poligono funicolare carico di pesi.

175. PROPOSIZIONE. Posto che le potenze $P, Q,$ l
applicate al poligono siano parallele, determinar
condizioni dell'equilibrio.

Avremo allora $\sin.\alpha' = \sin.\beta'$; $= \sin.\beta' = \sin$
$\sin.\gamma' = \sin.\delta$. Moltiplicando per queste le eq
zioni (150) del poligono equilibrato, si ha per c
dizione dell' equilibrio nel poligono tratto da f
parallele

$$\frac{P\sin.\alpha\sin.\alpha'}{\sin.(\alpha+\alpha')} = \frac{Q\sin.\beta\sin.\beta'}{\sin.(\beta+\beta')}$$
$$= \frac{R\sin.\gamma\sin.\gamma'}{\sin.(\gamma+\gamma')} = \frac{S\sin.\delta\sin.\delta'}{\sin.(\delta+\delta')}$$

o in altra forma

$$\frac{P}{\cot.\alpha+\cot.\alpha'} = \frac{Q}{\cot.\beta+\cot.\beta'}$$
$$= \frac{R}{\cot.\gamma+\cot.\gamma'} = \frac{S}{\cot.\delta+\cot.\delta'}.$$

Adunque ciascheduna delle potenze $P, Q, R,$
è proporzionale alla somma delle cotangenti de

angoli, ne' quali la sua direzione divide l'angolo del poligono (*).

158. *Coroll. I.* In questo caso le direzioni delle potenze, e l'intero poligono giacciono necessariamente nello stesso piano.

Poichè nel piano nel quale sono (146) i due lati AK, AB, e la potenza AP, dovrà pure trovarsi la seconda potenza BQ, che per ipotesi è parallela ad AP. E in questo piano cadrà eziandio (146) il terzo lato BC; e quindi la terza potenza CR; e così sino all'ultimo. Il piano sarà verticale, se il poligono è carico di pesi, come qui particolarmente supponghiamo.

159. *Coroll. II.* Risolvo la tensione Kt della prima fune in due forze, l'una A orizzontale, l'altra V verticale. E similmente risolvo la tensione $K't$ in due, A' orizzontale, V' verticale. E perchè (152) tutte le forze che agiscono sul poligono, se s'intendono trasportate su qualunque punto del sistema, deggiono equilibrarsi fra loro, è manifesto che dovrà essere $A=A'$; $V+V'=P+Q+R+S$.

Sarà poi $A=A'=T\text{sin.}\alpha=(151)\dfrac{P\ \text{sin.}\ \alpha\ \text{sin.}\ \alpha'}{\text{sin.}(\alpha+\alpha')}$

$$=\frac{P}{\text{cot.}\ \alpha+\text{cot.}\ \alpha'}.$$

160. *Coroll. III.* In generale i valori delle tensioni de' lati KA, AB, BC, CD, DK' espresse (150) per T, X, Y, Z, T' si ricaveranno come di sopra si mostrò all'art. 151. Risolvendo ciasche-

(*) Fuss, *Nova Acta Petrop.* Tom. II.

duna di queste tensioni in due forze, l' una orizzontale, l' altra verticale, le orizzontali riusciranno

$T \sin. \alpha$, $X \sin. \beta$, $Y \sin. \gamma$, $Z \sin. \delta$, $T' \sin. \delta'$,

le quali espressioni col sostituirvi i valori di T, X ec. diventeranno $\frac{P}{\cot. \alpha + \cot. \alpha'}$, $\frac{Q}{\cot. \beta + \cot. \beta'}$ ec., e però (157) tutte eguali fra loro, e ciascheduna $= A$.

Quindi la tensione orizzontale è costante per tutto il poligono, ed uguale ad uno de' pesi, come P, diviso per la somma delle cotangenti de' rispettivi angoli α; α'.

161. *Coroll. IV.* Le tensioni assolute poi delle funi KA, AB ec. sono per ordine

$$\frac{A}{\sin. \alpha}, \quad \frac{A}{\sin. \beta}, \quad \frac{A}{\sin. \gamma}, \quad \frac{A}{\sin. \delta}, \quad \frac{A}{\sin. \delta'}$$

Ogni fune è dunque tesa in ragione inversa del seno di sua obbliquità alla verticale.

162. *Coroll. V.* Una notabile proprietà di questo poligono è, che le direzioni de' lati estremi KA, $K'D$ prolungate concorrono in qualche punto della verticale condotta pel centro comune di gravità de' pesi P, Q, R, S.

Ciò potrebbe dimostrarsi col calcolo, ma più speditamente si dimostra riflettendo che questo sistema si riduce a tre forze. L' una è la risultante o la somma de' pesi P, Q, R, S, e questa agisce per la verticale condotta pel centro di gravità. Le altre due sono le tensioni Kt, $K't'$ delle funi che metton capo a' punti fissi, e queste agiscono per le direzioni AK, DK'. Ora per l' equilibrio di tre forze è d' uopo che le loro direzioni concorrano in un punto.

163. *Scolio. I.* Se i lati del poligono non sono corde flessibili, ma spranghe o travi l'una contro l'altra appoggiate, dovranno (156) le forze agire in senso contrario relativamente agli angoli del poligono. Quindi se il poligono è carico di pesi, converrà che esso sia posto al rovescio, così che l'angolo che farà ogni lato colla direzione del peso, sia supplimento di quello che prima faceva. Ed invece di pendere da' sostegni K, K' dovrà essere sopra i medesimi elevato ed eretto.

Del resto le condizioni e le proprietà dell'equilibrio sono le stesse di prima, e colle stesse formole si determinano le tensioni de' lati, le quali in questo caso operano in senso opposto, e debbono piuttosto chiamarsi pressioni o spinte.

164. *Scolio. II.* Il poligono rigido, oltre esser carico negli angoli, potrebbe esserlo ancora in uno o più punti de' lati. Allora i pesi che gravano ciascun lato si dovranno risolvere in due (40) applicati alle estremità di quel lato. Per tal modo tutti i pesi che gravano il poligono si ponno sempre intendere applicati ai vertici del medesimo.

CAP. XXII.

Della Curva funiculare.

165. *Proposizione I.* Trovare la curva d'equilibrio del filo flessibile AMB (Fig. 20) sollecitato in tutti i suoi punti da date forze.

Sia $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, e prendasi per elemento del filo l'archetto $Mm = ds$,

che si riguarderà come costante. Siano P, Q le forze applicate al punto M parallelamente alle x ed alle y; e così le forze sollecitanti l' elemento Mm saranno (133) Pds, Qds; e sia T la tensione di quell' elemento o latercolo Mm, la qual tensione si esercita secondo la direzione di quel latercolo, o secondo la tangente Mt della curva. Riguardandosi la curva come un poligono funicolare infinitilatero, le tensione T dovrà essere (155) la risultante di tutte le forze applicate alla curva dal punto A sino al punto M. Risolvasi la tensione T in due forze, l' una secondo le x, l' altra secondo le y; sarà la prima $-\frac{Tdx}{ds}$, la seconda $-\frac{Tdy}{ds}$. Adunque dovrà essere

$$-\frac{Tdx}{ds} = \int P\,ds\,; \quad -\frac{Tdy}{ds} = \int Q\,ds$$

Dalle quali due equazioni eliminando T emergerà la ricercata equazione del filo

$$dy\int P\,ds - dx\int Q\,ds = 0.$$

166. *Coroll. I.* Dalle stesse equazioni si ricaverà eziandio il valore della tensione T, mentre elevandole al quadrato la loro somma darà

$$T^2 = \left(\int P\,ds\right)^2 + \left(\int Q\,ds\right)^2$$

Ricavasi ancora un' altra espressione della stessa T differenziando quelle due equazioni, e poi sommandole dopo averne moltiplicata la prima per dx, la seconda per dy. Poichè avvertendo essere

$$dx^2 + dy^2 = ds^2\,; \quad dxddx + dyddy = dsdds = 0$$

ne avremo $\quad -dT = Pdx + Qdy,$

onde $\quad T = \text{cost.} - \int(Pdx + Qdy).$

167. *Coroll. II.* Se il filo è fisso ad un chiodo nel termine A, è manifesto (153) che tra le forze applicate alla curva da A sino in M va compresa eziandio la forza At', che si dovrebbe porre in A per mantenere l'equilibrio quando il punto A fosse libero: e che questa forza At' è uguale e contraria alla risultante di tutte quante le forze applicate al filo da A sino in B. Passerà dunque questa risultante pel punto di sospensione A, ed ivi toccherà la curva AMB.

168. *Coroll. III.* Il Problema non sarebbe guari più difficile se le forze che incurvano il filo agissero in diversi piani. Sarebbe allora
$-dT = Pdx + Qdy + Rdz$; e la doppia curvatura del filo sarebbe rappresentata con due qualunque fra queste tre equazioni

$$dy\int Pds - dx\int Qds = 0$$
$$dz\int Pds - dx\int Rds = 0$$
$$dz\int Qds - dy\int Rds = 0$$

169. *Coroll. IV.* La curva espressa dall'equazione dell' art. 165 sarà anche (156) la curva d' equilibrio d' un Arco composto di latercoli rigidi addossati l' uno all' altro. Solo si richiede che le forze agiscano in senso contrario, cioè dall' infuori all' indentro.

170. *Coroll. V.* Sia un velo o un lenzuolo flessibile attaccato alla periferia d' un cerchio del raggio CB, ed in ogni punto della periferia che ha per raggio $PM = y$ sollecitato dalle forze P, Q. Si cerca la curva AMB dalla di cui rotazione attorno AC si genera la superficie equilibrata di esso velo.

Considerando l' equilibrio dell' unghia tenuissima BAb, si può prendere per elemento della

medesima il trapezio Mq. Essendo poi $Mm = ds$, ed Mp proporzionale ad y, questo trapezio potrà esprimersi per $kyds$, essendo k un coefficiente costante. Quindi le forze animatrici dell' elemento Mq saranno $Pkyds$, $Qkyds$; e la tensione sarà $T.Mp$. e potrà esprimersi col prodotto Tky. Fatte queste mutazioni nell' equazioni dell' equilibrio, troveremo

$$-dT = Pydx + Qydy$$

e l' equazione della curva AMB riuscirà

$$dy\int Pyds - dy\int Qyds = 0.$$

Se le forze P, Q sono rivolte all' indentro, l' istessa curva AMB produrrà colla sua rotazione una Testuggine, la quale essendo costrutta d' infinite faccette rigide, come Mq, semplicemente appoggiate infra loro, queste si sosteranno collo scambievol contrasto.

171. *Scolio.* Se il velo circonda tutta intera la periferia, di modo che segnandolo con un piano perpendicolare all' asse AC, la sezione sia un cerchio intero avente per raggio y, allora potrà esservi equilibrio, ancorchè sia $dy\int Pyds - dx\int Qyds < 0$.

In fatti posto che il velo sia equilibrato, e la curva AMB abbia per equazione

$$dy\int Pyds - dx\int Qyds = 0,$$

supponghiamo che all' elemento Mq s' aggiunga una forza qualunque diretta secondo PM, ed una forza eguale si applichi in giro a tutti gli altri elementi che insieme coll' Mq compongono la zona circolare del raggio PM. È manifesto che l'equilibrio non si scomporrà; mentre si suppone che le fibre del velo siano incapaci di allungarsi per nissun verso, e quindi incapace di allargarsi la zona. L' effetto di questa forza

che s' accresce alla zona Mq si riduce al produrre una tensione nel perimetro di essa zona, la qual tensione si misura come fu detto all' art. 155, ma l'equilibrio tuttavia si mantiene. Adunque nell'equazione $dy\int Py\,ds - dx\int Qy\,ds = 0$ si può accrescere quanto e come si vuole il valore di $\int Qy\,ds$ senza difetto dell' equilibrio. Potrà dunque essere $dy\int Py\,ds - dx\int Qy\,ds < 0$.

Non così avverrebbe se si applicasse alla zona condotta per Mq una forza diretta secondo MP; poichè nulla impedisce che la zona intera non si riduca in più stretto cerchio corrugandosi. Quindi non potrebbe mai essere $dy\int Py\,ds - dx\int Qy\,ds > 0$.

Applicando un simile discorso alla Testuggine costrutta di faccette solide, incompressibili, e tutta chiusa d'intorno, si vedrà che con accrescere a tutti i punti di ciascheduna zona una forza, qualunque siasi, diretta secondo MP, non si disturba l' equilibrio. Può dunque scemarsi a piacimento il valore di $\int Qy\,ds$, e può essere $dy\int Py\,ds - dx\int Qy\,ds > 0$.

Conchiudiamo che pel velo intero equilibrato, l' equazione della curva AMB atta a produrlo, è

$$dy\int Py\,ds - dx\int Qy\,ds = 0, \text{ oppure } < 0.$$

E per la testuggine intera è

$$dy\int Py\,ds - dx\int Qy\,ds = 0, \text{ oppure } > 0.$$

172. *Proposizione II.* Trovare la curva d' equilibrio d' un filo sollecitato da forze normali al filo stesso.

Questo Problema è un caso particolare del precedente. Sia $N\,ds$ la forza normale alla curva, che spinge l' elemento ds. Risolvendola nelle due $P\,ds$, $Q\,ds$ parallele alle x ed y, avremo (35)

$Pds = Ndy$, $Qds = -Ndx$. Sarà pertanto l' equazione della nostra curva (165)

$$dy\int N\,dy - dx\int N\,dx = 0.$$

173. *Coroll. I.* E sarà (166) $-dT = Pdx + Qdy = 0$, onde $T =$ cost. Adunque un filo incurvato da forze normali è tutto teso ugualmente.

174. *Coroll. II.* Dicasi ϕ l' angolo rMm che fa l' elemento della curva ds colle x. Sarà $dx = ds \cos.\phi$, $dy = ds \sin.\phi$. Ora noi abbiamo (165) l' equazione $-\frac{Tdx}{ds} = \int Pds$; o sia $-T\cos.\phi = \int Ndy$; e differenziando $Ndy = Td\phi \sin.\phi = \frac{Td\phi\,dy}{ds}$; onde risulta in ultimo l' equazione semplicissima

$$Nds = Td\phi.$$

175. *Coroll. III.* Dicasi R il raggio osculatore della curva nel punto M. Sarà $R = \frac{ds}{d\phi}$. Quindi l' equazione (173) ci dà $N = \frac{T}{R}$. Onde questa bellissima proprietà si raccoglie, che la potenza applicata alla curva è da per tutto reciprocamente proporzionale al raggio di curvatura, e viceversa.

176. *Coroll. IV.* Se una fune circondotta ad una curva resistente è tirata nelle sue estremità da due forze, nello stato d' equilibrio le due forze debbon essere uguali; la fune è tutta tesa ugualmente; e la pressione che essa fa sopra ciaschedun punto della curva è inversamente proporzionale al raggio di curvatura.

Imperocchè la pressione della corda sulla curva abbracciata è da per tutto (100) perpendicolare alla

curva stessa. Ora l'equilibrio sussisterà se fingasi che tolta di sotto la curva si applichino a tutti i punti della corda delle forze uguali e contrarie alle pressioni che la corda faceva sui punti contigui della curva sottoposta. Siamo dunque nel caso d' una corda arcuata da forze alla stessa corda normali, onde ec.

CAP. XXIII.

Della Catenaria.

177. Proposizione *I.* Trovare la curvatura della corda o catena pesante KAK' (Fig. 21) sospesa a due punti fissi K, K'

Questo pure non è che un caso particolare del precedente Problema (165). Per giungere alla più semplice equazione della curva prendasi per origine delle ascisse il punto infimo A della catena, e per asse la verticale AB, ponendo $AP=x, PM=y, AM=s$. Sussisterà l' equilibrio della catena se intendasi reciso e tolto via tutto l' arco AK', purchè nel punto A s' applichi una forza At eguale alla tensione orizzontale della curva, la qual tensione sappiamo (160) esser costante, ed abbiamo espressa per A. Ora se dicasi Π il peso dell' arco AM, sarà $\int Pds=-\Pi$, $\int Qds=-A$. Quindi (165) l' equazione della curva sarà $-\Pi dy+Adx=0$, o sia $\Pi dy=Adx$.

177. *Coroll. I.* Se il punto infimo A fosse carico d' un peso particolare V, sarebbe $\int Pds=-\Pi-V$, e l' equazione della catena sarebbe

$$\Pi dy + V dy = A dx$$

179. *Coroll. II.* La tensione in ciascun punto M sarà (166) $T = \sqrt{(\Pi^2 + A^2)}$; onde va sempre crescendo da A sino in K.

180. *Coroll. III.* Se il peso della catena è uniforme, sarà Π proporzionale all' arco s, e potrà farsi $= k\,s$, essendo k un fattor costante. Quindi sarà l' equazione della catenaria omogenea $ksdy = Adx$; in luogo della quale può scriversi puramente $sdy = Adx$, ritenendo che la costante A denoti la tensione orizzontale della catena divisa pel fattore k.

181. *Coroll. IV.* Per ridurre quest'equazione a termini finiti si osservi che essendo $ds = dy\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$ se ponghiamo per $\frac{dx}{dy}$ il suo valore $\frac{s}{A}$, avremo tra y ed s l' equazione

$$dy = \frac{A\,ds}{\sqrt{(A^2 + s^2)}}$$

la quale integrata sì che $y = 0$ dia $s = 0$, fa

$$y = A \log. \frac{s + \sqrt{(A^2 + s^2)}}{A}$$

Indi avremo tra x ed s l' equazione

$$dx = \frac{s\,ds}{\sqrt{(A^2 + s^2)}}$$

la quale integrata sì che $x = 0$ dia $s = 0$, fa $A + x = \sqrt{(A^2 + s^2)}$; onde $s = \sqrt{(2Ax + x^2)}$

Quindi in fine l' equazione tra x ed y

$$y = A \log. \frac{A + x + \sqrt{(2Ax + x^2)}}{A}$$

182. *Coroll. V.* È dunque la catenaria omogenea rettificabile, essendo l' arco s medio proporzionale fra x, e $2A + x$.

183. *Coroll. VI.* Volendosi descrivere per punti la catenaria, fa d'uopo sia nota la positura de' termini K, K' e la lunghezza della catena KAK'. Siano dunque $KQ = a$, $QK' = b$, $KAK' = l$ quantità date; e $KB = m$, $BA = n$, $KMA = h$ quantità da determinarsi. Nelle equazioni

$$s = \sqrt{(2Ax + x^2)}; \; y = A \log. \frac{A + x + s}{A}$$

conviene che posto $x = n$, riesca $y = m$, $s = h$; e posto $x = n - b$, riesca $y = a - m$, $s = l - h$. Quindi quattro equazioni per le quali determineremo le quantità m, n, h, A.

Fissata così la positura dell' asse AB, e determinata la costante A, tutti i punti della catenaria si determineranno mediante l' equezione tra x ed y.

184. *Coroll. VII.* Facilissima è poi la descrizione meccanica della catenaria omogenea, segnando in un piano verticale l' orma d' una catenella uniforme attaccata a due punti fissi. Quando la saetta è assai piccola, l'andamento di questa curva s'accosta molto a quello della cicloide, oppure a quello della parabola. In fatti l' arco s si confonde allora coll' ordinata y; e l' equazione $s\,dy = A\,dx$ si può scambiare colla $s\,ds = A\,dx$ che appartiene alla cicloide, oppure colla $y\,dy = A\,dx$, che appartiene alla parabola.

A torto si va ripetendo avere equivocato il Galileo confondendo la catenaria colla parabola; egli ha solamente avvisata (*) la somiglianza che passa tra queste due curve.

(*) *V.* Galileo, *Opere. Padova* 1744. Tom. III, pag. 169.

185. *Coroll. VIII.* Si può determinare a un di presso con una regola facilissima l' altezza del ventre, o sacca che farà nel mezzo una corda attaccata a due punti egualmente alti sopra l' orizzonte, e tesa da un peso molto grave in paragone del peso di essa corda. Sia L la lunghezza della corda, p il di lei peso, e P il peso tendente; sarà prossimamente $s = \frac{1}{2} L$, ed $\frac{s}{A} = \frac{p}{2P}$. Ora l' equazione approssimativa (184) $s\,ds = A\,dx$ darà la saetta $x = \frac{s^2}{2A} = \frac{pL}{8P}$.

186. *Proposizione II.* Dalla circonferenza d' un cerchio orizzontale descritto col raggio BK penda un velo carico di pesi uniformemente compartiti in ogni sua sezione orizzontale. Si cerca la curva AMK che colla sua rivoluzione intorno l' asse AB genera la superficie del velo.

L' unghia sottilissima KAk può considerarsi come una catenaria fissa ne' termini Kk ed A. Prendasi per elemento di quest' unghia il trapezio Mq. E perchè la di lui base Mp è proporzionale ad y, il peso del trapezio Mq potrà esprimersi per $y\,d\Pi$, onde il peso dell' unghia parziale MAp sarà $\int y\,d\Pi$. Se dunque nell' equazione della catenaria lineare (177) in luogo di Π surrogherò $\int y\,d\Pi$, avrò la cercata equazione della curva AMK, che sarà

$$dy \int y\,d\Pi = A\,dx.$$

187. *Coroll. I.* Se il punto infimo A fosse aggravato d' un peso particolare V, sarebbe l' equazione

$$dy \int y\,d\Pi + V\,dy = A\,dx.$$

188. *Coroll. II.* Se il peso è uniformemente diffuso per tutta la superficie del velo, sarà $d\Pi$ proporzionale a ds, e si avrà $k\,dy\int y\,ds = A\,dx$, o più semplicemente (180) $dy\int y\,ds = A\,dx$.

189. *Scolio. I.* Arrovesciando la Fig. 21, cosicchè l'angolo che fa ogni elemento della curva colla direzione del peso sia supplimento di quello che prima faceva, è manifesto (163)

Che la curva d'equilibrio d'una volta composta di latercoli rigidi pesanti o carichi, ed appoggiati l'un contro l'altro, è una catenaria, e chiamando Π il peso dell' Arco, ha per equazione $\Pi dy = A\,dx$.

E che la superficie d'equilibrio d'una Cupola composta di zone minime circolari pesanti o caricate, nasce dalla rotazione d'una curva, la quale, chiamando $y\,d\Pi$ il peso della zona elementare, ha per equazione $dy\int y\,d\Pi = A\,dx$.

190. *Scolio II.* Conforme a ciò che si disse all'art. 171 conviene per ultimo avvertire che se il velo abbraccia l'intera circonferenza del cerchio, ed è tessuto di fibre incapaci d'allungarsi per nissun verso, potrà essere ancora $dy\int y\,d\Pi < A\,dx$. E per lo contrario, se la Cupola è intera potrà essere $dy\int y\,d\Pi > A\,dx$.

Quindi l'equazione, o piuttosto la condizion generale delle curve, che rotando attorno un asse verticale ponno produrre la superficie equilibrata d'un velo pesante, è

$$dy\int y\,d\Pi = A\,dx, \text{ oppure } < A\,dx,$$

e la condizion generale delle curve, che ponno produrre la superficie d'una Cupola equilibrata, è

$$dy\int y\,d\Pi = A\,dx, \text{ oppure } > A\,dx.$$

CAP. XXIV.

Della Curva Elastica.

191. Se una verga o una lastra rettilinea AL (Fig. 22) in arcata AB fa forza per rimettersi da se nella primiera situazione diritta, dicesi quella verga *Elastica* ed *Elasticità* la forza che tende a raddrizzarla.

Agendo questa forza sopra ciaschedun archetto Mm della lastra incurvata, tende a far girare quell' archetto attorno il suo termine M per portarlo in dirittura dell' archetto o latercolo vicino μM. Quindi essa opera con un certo momento di rotazione rispetto al punto M, o piuttosto rispetto a un asse perpendicolare al piano sul quale giace la lastra, e condotto pel punto M. Intorno al valore di questo momento assumeremo per ora la seguente

192. *Ipotesi.* Il momento dell' elasticità per ciascun punto M della lastra incurvata è inversamente proporzionale al raggio osculatore della curva nel punto M.

Dicasi R questo raggio. Si esprimerà il momento dell' elasticità colla formola $\frac{E}{R}$, essendo E una quantità, che sarà costante per una stessa lastra, quand' ella sia omogenea, e d' uniforme grossezza ; ma che potrà esser diversa per diverse lastre.

193. *Proposizione I.* Trovare la curva d' equilibrio d' una lastra elastica omogenea, sollecitata in ogni suo punto da date forze.

Siccome l' archetto Mm in virtù dell' elasticità tende a girare attorno il punto M, ed è il momento di questa forza $\frac{E}{R}$, così per l' equilibrio della curva si richiede che la risultante di tutte le forze ad essa applicate dal punto A sino al punto M produca non solamente la tensione T secondo la tangente Mt, ma ben anche una forza normale N, la quale tenda a far girare lo stesso archetto attorno M in senso contrario, e con eguale momento. Sia dunque $N\omega$ il momento di questa forza, onde sia ω la distanza della sua direzione dal punto M. Dovrà essere $N\omega = \frac{E}{R}$. E perchè passando dal punto M al punto prossimo m, il momento dell' elasticità diventa $\frac{E}{R} + d.\frac{E}{R}$, e il momento della forza N diventa $N(\omega + ds)$, dovrà pur essere per il punto m, $N(\omega + ds) = \frac{E}{R} + d.\frac{E}{R}$; onde $N ds = d.\frac{E}{R}$.

Ora conservando le denominazioni dell' art. 165 la risultante di tutte le forze applicate alla lastra da A in M, riducesi a due forze $\int P ds$, $\int Q ds$ parallele rispettivamente alle x, ed alle y. A queste forze sostituendo altre due, l' una T secondo la tangente, l' altra N secondo la normale, nasce (34)

$$T = \frac{dx\int P ds + dy\int Q ds}{ds};\ N = \frac{dy\int P ds - dx\int Q ds}{ds}.$$

La prima formola ci dà la tensione della lastra in M. La seconda ci dà la forza normale N, che sostituita nell' equazione $N ds = d.\frac{E}{R}$ ci darà

per equazione della curva AMB

$$dy\int P\,ds - dx\int Q\,ds = d\,.\frac{E}{R}.$$

194. *Scolio.* Se la lastra non fosse omogenea, o se il momento dell' elasticità non si volesse supporre inversamente proporzionale al raggio di curvatura, allora invece d' esprimere detto momento per $\frac{E}{R}$, lo denoteremo semplicemente per E, intendendo con E non più una costante, ma bensì una variabile che sarà funzione di s. Ed invece dell' equazione (193) avremo quest' altra

$$dy\int P\,ds - dx\int Q\,ds = dE.$$

195. *Proposizione. II.* Trovare la figura della lastra elastica orizzontale AL fissa nel termine A, e piegata in AMB dalla forza BS applicata all' altro termine B.

Essendo la lastra fissa in A, converrà (167) intendere applicata al punto A quella forza che sarebbe capace di mantener l' equilibrio se il punto A si rendesse libero. Se la direzione della BS passasse per A, la forza da applicarsi in A sarebbe eguale e contraria alla BS. Ma se no, bisognerà che la lastra sia fissa non già nel solo punto estremo A, ma nell'estremo latercolo Aa, o ne' due punti A, a. Ed allora risolvendo la BS in due forze ah, AH a lei parallele, ed applicate a' punti a, A saranno ah, AH le forze capaci di mantenere l' equilibrio, rendendosi libero il sistema. Ma (37) $ah - AH = BS$. Dunque la forza che si dovrà intendere applicata al latercolo Aa, sarà eguale e parallela alla BS, ma in senso contrario rivolta.

Ciò posto risolvasi la BS in due forze, l' una $-F$ orizzontale, l' altra G verticale. Agiranno nell' origine Aa della curva le due forze, l' una F orizzontale, l' altra $-G$ verticale. E sarà $\int P ds = -G$, $\int Q ds = F$, e l' equazione della curva AMB sarà (195)

$$d.\frac{E}{R} = -F dx - G dy;\ \text{onde}\ \frac{E}{R} = C - Fx - Gy.$$

196. *Coroll. I.* Per determinare la costante C si avverta che nell' ultimo latercolo cB l' inflessione deve esser nulla, giacchè la forza BS immediatamente ad esso applicata non ha che un momento infinitesimo per farlo girare intorno al punto c. Dunque chiamando $AC = a$, $CB = b$, bisognerà che quando è $x = a$ ed $y = b$, sia $\frac{E}{R} = 0$. Determinata da ciò la costante, sarà l' equazione

$$\frac{E}{R} = F(a - x) + G(b - y).$$

197. *Coroll. II.* Se la lastra è piegata in forza d'un peso G pendente dall'estremità B, sarà $\frac{E}{R} = G(b - y)$; onde il raggio di curvatura in ciascun punto M della lastra è inversamente proporzionale alla distanza orizzontale di esso punto dal termine B.

198. *Coroll. III.* Prendendosi per costante l' elemento ds, abbiamo $R = \frac{ds\, dy}{ddx}$; onde l' equazione tra le coordinate della curva è

$$E\, ddx = G(b - y)\, ds\, dy$$

non integrabile in termini finiti.

Ma se l' inflessione della lastra sarà piccolissima,

potremo fare $ds = dy$; ed allora potendosi aver per costante anche l' elemento dy, avremo

$$E\,d.\frac{dx}{dy} = G\,(b - y)\,dy$$

ed integrando così che $y = 0$ renda $\frac{dx}{dy} = 0$, viene

$$\frac{E\,dx}{dy} = G\,b\,y - \frac{1}{2}\,Gy^2$$

ed integrando di nuovo

$$b\,E\,x = 3\,G\,b\,y^2 - G\,y^3$$

equazione alla parabola cubica.

199. *Proposizione III.* Trovare la figura della lastra elastica AB (Fig. 23) piantata verticalmente, ed inflessa pel carico d' un peso G postovi in cima.

Qui è manifesto che fatto $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$ sarà $\int P\,ds = G$, $\int Q\,ds = 0$, onde l'equazione (193) $d.\frac{E}{R} = G\,dy$, ed integrando $\frac{E}{R} = Gy$. Nè occorre aggiunger costante, perchè nel punto A dove $y = 0$, dev' essere $\frac{E}{R} = 0$ pel motivo poc' anzi detto (196). Sarà dunque in ciascun punto M della lastra inarcata il raggio osculatore inversamente proporzionale al ventre PM.

200. *Coroll. I.* Facendosi ds costante, abbiamo $R = -\frac{ds\,dx}{d\,dy}$, onde l' equazione tra le coordinate della curva sarà $E\,d\,dy = -\,G\,y\,ds\,dx$.

Se l' inflessione è piccolissima, potremo assumere l' elemento $dx = ds$ e costante, e l' equazione diverrà

$$G\,y + \frac{E\,d\,dy}{dx^2} = 0$$

Sia $RS = f$ il ventre massimo della curva, onde la tangente in S sia verticale. Moltiplicando l' equazione per $2\,dy$, ed integrandola in modo che $y = f$ renda $\frac{dy}{dx} = 0$, avremo $\frac{E\,dy^2}{dx^2} = G(f^2 - y^2)$, o sia $dx = \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(f^2 - y^2)}}$, ed integrando da capo $x = \sqrt{\frac{E}{G}} \cdot \text{Arc. sin.} \frac{y}{f}$; ovvero $y = f \sin. x \sqrt{\frac{G}{E}}$.

201. *Coroll. II.* Posto $x = AB = a$, dee tornare $y = 0$. Sarà dunque $f \sin. a \sqrt{\frac{G}{E}} = 0$; onde $a \sqrt{\frac{G}{E}} = \text{Arc. sin. } 0 = \pi$; e $G = \frac{E\,\pi^2}{a^2}$. Questo è dunque il valore che dovrà avere il peso G, affinchè possa produrre nella lastra un' inflessione piccolissima.

Se sarà $G < \frac{E\,\pi^2}{a^2}$, non potrà soddisfarsi all'equazione $f \sin. a \sqrt{\frac{G}{E}} = 0$, se non col fare $f = 0$. Quindi verrebbe $y = 0$, il che vuol dire che la lastra non si piegherà nè punto nè poco.

Se poi sarà $G > \frac{E\,\pi^2}{a^2}$, l' equaaione $f \sin. a \sqrt{\frac{G}{E}} = 0$ ci condurrebbe tuttavia alla medesima conseguenza, e mostrerebbe che la lastra non può piegarsi. Ma una tal conseguenza non può per niun modo ammettersi in questo caso, essendo evidente che la lastra una volta incurvata, per l' aggiunta di nuovo carico non può che incurvarsi

vie più. Quindi convien dire piuttosto, che allora l' inflessione non essendo più piccolissima, l' equazione $y = f \sin. x \sqrt{\frac{G}{E}}$ non è più atta a rappresentare la figura dell' arco della lastra.

202. *Coroll. III.* Posto $G = \frac{E \pi^2}{a^2}$, l' ordinata $y = f$ risponde all' ascissa $x = \frac{1}{2} a$; dal che si vede che il ventre massimo $R S$ cade nella metà dell' altezza.

LIBRO SECONDO

DEL MOTO.

SEZIONE PRIMA

DEL MOTO D' UN PUNTO.

CAP. I.

Del moto equabile, e del moto vario.

203. Nel moto *equabile* la velocità si mantien costante, nel moto *vario* ella va crescendo o scemando: e nel primo caso il moto dicesi *accelerato*, nel secondo *ritardato*. Nasce il moto equabile da una forza che dopo d' aver comunicata al mobile una determinata velocità lo abbandona, conservando esso per l' inerzia (7) la velocità impressa. Nasce il moto vario da una forza che agendo continuamente sul mobile va ad ogni istante accrescendogli o togliendogli velocità. Una tal forza dicesi *acceleratrice* o *ritardatrice*, e si misura ad ogni istante dal rapporto di quel minimo grado di velocità che essa aggiunge o leva al mobile, a quel minimo tempo nel quale glielo aggiunge, o glielo leva.

204. E se questo rapporto è costante, cosicchè in eguali tempetti si accrescano o si tolgano al

mobile eguali gradi di velocità, la *forza acceleratrice* o *ritardatrice* è *costante*, e il moto che ne deriva dicesi *equabilmente accelerato* o *ritardato*. Da tutto ciò agevolmente si traggono le Proposizioni seguenti.

205. *Proposizione I.* Nel moto equabile la velocità essendo costante, gli spazj percorsi sono proporzionali ai tempi ne' quali si percorrono.

206. *Proposizione II.* Nel moto vario chiamando ϕ la forza acceleratrice, u la velocità, s lo spazio, t il tempo, la relazione fra queste quantità è determinata dalle due equazioni

$$u = \frac{ds}{dt}; \quad \phi = \frac{du}{dt}.$$

207. *Coroll. I.* Da queste due equazioni eliminando prima t, poscia u, traggonsi quest' altre due

$$\phi\, ds = u\, du; \quad \phi\, dt = d \cdot \frac{ds}{dt}$$

le quali però essendo contenute nelle due prime, non arrecano veruna nuova determinazione.

208. *Coroll. II.* Avendosi pertanto due equazioni fra le quattro indeterminate ϕ, u, s, t; date due qualunque fra queste, si conosceranno le altre due; e data una sola, si conoscerà la relazione che passa fra due qualunque delle altre.

209. *Coroll. III.* Le equazioni precedenti si riferiscono immediatamente al moto accelerato; si adattano al moto ritardato, facendo la du negativa.

CAP. II.

Del moto equabilmente accelerato o ritardato.

210. PROPOSIZIONE *I.* Nel moto equabilmente accelerato, partendo il mobile dalla quiete, ed essendo animato da una forza acceleratrice costante g, si hanno l'equazioni seguenti

$$u = g\,t\,;\quad s = \frac{u^2}{2g}\,;\quad s = \frac{gt^2}{2}$$

l'ultima delle quali è contenuta nelle due prime.

Poichè l'equazione $\phi\,d\,t = d\,u$, fatto $\phi = g$, integrata dà $u = g\,t$; poscia l'altra equazione $\phi\,d\,s = u\,d\,u$ dà similmente $2\,g\,s = u^2$; e finalmente dalle due prime eliminando u s'ottiene la terza. Nè occorre nelle integrazioni aggiunger costante, poichè u, s, t svaniscono contemporaneamente giusta l'ipotesi.

211. *Coroll. I.* Le velocità crescono dunque come i tempi; e gli spazj come i quadrati de' tempi, o delle velocità.

212. *Coroll. II.* Gli spazj descritti in eguali e successivi intervalli di tempo, cominciando dal principio del moto, seguono la ragione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7 ec.

213. *Coroll. III.* Se il mobile ha percorso nel tempo t lo spazio s con moto equabilmente accelerato, ed acquistata la velocità u; ed indi per egual tempo t prosegua a moversi con moto equabile, e

colla velocità acquistata u, esso descriverà lo spazio doppio $2s$.

214. *Coroll. IV.* La misura della forza acceleratrice costante g si ottiene quando si conosca lo spazio che il mobile ha descritto in un dato tempo t: poichè si ha $g = \frac{2s}{t^2}$.

215. *Coroll. V.* Vagliono l'equazioni anzidette, se il mobile partì dalla quiete, siccome s'è avvertito; ma se esso aveva una velocità impressa c, convien tenerne conto nel determinar le costanti da aggiungere agl'integrali di $\varphi dt = du$, e di $\varphi ds = udu$; con che si avranno in iscambio delle prime le tre equazioni che seguono

$$u = c + gt; \quad s = \frac{u^2 - c^2}{2g}; \quad s = ct + \frac{gt^2}{2}.$$

216. *Proposizione II.* Nel moto equabilmente ritardato, essendo c la velocità iniziale del mobile in direzione contraria a quella della forza acceleratrice, vagliono l'equazioni

$$u = c - gt; \quad s = \frac{c^2 - u^2}{2g}; \quad s = ct - \frac{gt^2}{2}$$

le quali si ottengono speditamente dall'integrazione delle equazioni generali (209)

$$\varphi dt = -du; \quad \varphi ds = -udu.$$

217. *Coroll. I.* La durata di questo moto, e lo spazio scorso sino all'estinzione della velocità impressa c, si esprimono come segue

$$t = \frac{c}{g}; \quad s = \frac{c^2}{2g}.$$

218. *Coroll. II.* Or questo tempo, e questo spazio sono appunto quegli stessi, ne' quali il mobile par-

tendo dalla quiete con moto equabilmente accelerato acquista la velocità c. Laonde se dopo spenta la velocità impressa, la forza acceleratrice prosegue ad agire, il mobile ricalcherà la stessa traccia, e tornerà in tempo eguale al punto onde partì, dove giunto avrà ricovrato in senso opposto la velocità iniziale c.

Coroll. III. Nel moto equabilmente ritardato le velocità sono come i tempi che restano sino alla cessazione del moto; e gli spazj che restano a descrivere sino alla cessazione del moto sono come i quadrati de' tempi, o delle velocità.

CAP. III.

Del moto verticale de' gravi.

220. PROPOSIZIONE. Il moto de' gravi nella discesa verticale libera è moto equabilmente accelerato, e nella salita equabilmente ritardato.

Ciò è palese dall'essere la gravità (58) una forza costante e continuamente applicata in direzione verticale.

221. *Coroll. I.* Si disse pure che un grave scendendo liberamente dalla quiete percorre in 1″ lo spazio di piedi 15,098 di Parigi, o sia di metri 4,9044. Quindi prendendo 1″ per unità de' tempi, ed il metro per unità degli spazj, avremo per l'espressione di questa forza acceleratrice (214) $g = 9,8088$.

222. *Coroll. II.* Volendosi pertanto la velocità

acquistata, o lo spazio descritto dal grave cadente per un dato tempo t, o viceversa, serviranno le formole

$$u = 9,8088\, t \;;\quad t = 0,1019\, u$$
$$s = 4,9044\, t^2 \;;\quad t = 0,4515 \sqrt{s}.$$

223. *Coroll. III.* Che se vogliasi la velocità acquistata dal grave scendente per una data altezza s, o sia, come soglion chiamarla; la velocità *dovuta* all'altezza s; o se viceversa data la velocità si chiegga l'altezza s a lei *dovuta*, eccone le formole.

$$u = 4,4292 \sqrt{s}\;;\quad s = 0,0510\, u^2.$$

224. *Coroll. IV.* Un grave lanciato in alto con velocità c salirà nel tempo $0,1019\, c$ all'altezza $0,0510\, c^2$. Di lì comincerà a scendere, ed in altrettanto tempo quanto fu quello della salita tornerà al punto onde fu lanciato, avendo ricovrata la vevelocità di projezione c.

225. *Scolio.* In questo Capo e ne' seguenti consideriamo il corpo come se fosse un atomo o punto materiale, prescindendo affatto dalla massa e dalla figura. Vedremo infatti a suo luogo che queste affezioni non cangiano il moto libero prodotto dalla gravità.

CAP. IV.

Moto verticale de' gravi ne' mezzi resistenti.

226. *Ipotesi.* La resistenza dell'aria, e d'ogni altro *mezzo* fluido in pari circostanze è proporzionale al quadrato della velocità del corpo che in esso si move.

Questa forza ritardatrice può dunque esprimersi per u^2 moltiplicato per un coefficiente costante, che per comodità del calcolo faremo gk^2, onde sia la forza ritardatrice $gk^2 u^2$. Questo coefficiente poi dipende dalla figura del corpo, e dal rapporto del suo peso specifico a quello del fluido, onde il valore di k è lo stesso per uno stesso corpo, e per uno stesso fluido, ma cangia ne' diversi corpi, e ne' mezzi diversi, secondo le leggi che nell'Idraulica s' insegnano.

227. *Proposizione I.* Scendendo un grave dalla quiete attraverso un mezzo resistente, cercasi la relazione fra lo spazio, il tempo e la velocità.

Qui la forza acceleratrice è $g - gk^2 u^2$. Fatto dunque $\varphi = g(1 - k^2 u^2)$ l'equazione $\varphi\, dt = du$, e $\varphi\, ds = u\, du$ divengono

$$g\,dt = \frac{du}{1 - k^2 u^2};\quad g\,ds = \frac{u\,du}{1 - k^2 u^2}.$$

S' integrino queste due equazioni, determinando a dovere le costanti per la condizione che quando $t = 0$, si ha insieme $s = 0$, $u = 0$. E si otterranno le due equazioni

$$u = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$$

$$s = \frac{1}{2gk^2} \cdot \log. \frac{1}{1 - k^2 u^2}$$

onde eliminando u, avremo la terza

$$s = \frac{1}{gk^2} \cdot \log. \frac{1}{2} \left\{ e^{gkt} + e^{-gkt} \right\}.$$

228. *Coroll.* La velocità del grave cadente non può mai oltrepassare, e nè anche aggiugnere il

limite $u = \frac{1}{k}$. S'avvicina però moltissimo a questo limite, ed il moto si rende sensibilmente uniforme dopo un certo tempo tanto più breve quanto è maggiore il coefficiente k della resistenza.

229. *Proposizione II.* Salendo un grave verticalmente attraverso un mezzo resistente, ed essendo c la velocità di projezione, si cerca la relazione tra lo spazio, il tempo e la velocità.

Qui la forza ritardatrice è $g + g k^2 u^2$: onde fatto $\varphi = g(1 + k^2 u^2)$ l'equazione $\varphi\, d t = - d u$, $\varphi\, d s = - u\, d u$ divengono

$$g\, d t = \frac{- d u}{1 + k^2 u^2}; \quad g\, d s = \frac{- u\, d u}{1 + k^2 u^2}.$$

E qui pure integrando, e determinando le costanti come viene affinchè $t = 0$ dia $s = 0$, $u = c$ si troverà

$$u = \frac{1}{k} \cdot \frac{k c - \text{tang.}\, g k t}{1 + k c\, \text{tang.}\, g k t}$$

$$s = \frac{1}{2 g k^2} \cdot \log. \frac{1 + k^2 c^2}{1 + k^2 u^2}$$

ed eliminando u,

$$s = \frac{1}{g k^2} \log. (\cos. g k t + k c \sin. g k t).$$

230. *Coroll.* La durata di questo moto, e l'altezza della salita si ottengono, ponendo nelle precedenti equazioni $u = 0$; onde si ha

$$t = \frac{1}{g k} \text{Arc. tang.}\, k c\,; \quad s = \frac{1}{2 g k^2} \log. (1 + k^2 c^2).$$

CAP. V.

Del metodo curvilineo.

231. PROPOSIZIONE. Determinare il moto d' un punto sollecitato da più forze.

Sia riferita la situazione del punto mobile a tre coordinate x, y, z, e le forze sollecitanti si riducano a tre P, Q, R parallele a queste coordinate. Essendo ds l' archetto della curva che il punto descriverà nell' istante dt, sarà la di lui velocità $u = \frac{ds}{dt}$. E perchè ds è diagonale d' un parallelepipedo che ha per lati dx, dy, dz non può il punto mobile percorrere nell'istante dt l'archetto ds senza che insieme percorra parallelamente alle ordinate x, y, z gli spazietti dx, dy, dz; per lo che in vece della velocità $\frac{ds}{dt}$ può concepirsi mosso colle tre velocità $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ parallele alle ordinate x, y, z. Quindi l'equazione (207) $\phi dt = d.\frac{ds}{dt}$ si risolverà in queste tre

$$P dt = d.\frac{dx}{dt}; \quad Q dt = d.\frac{dy}{dt}; \quad R dt = d.\frac{dz}{dt}.$$

232. *Coroll. I.* Queste equazioni comprendono la piena determinazione del moto. Imperocchè 1.° integrandole, avremo le tre velocità parziali $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dalla composizione delle quali risulta la velocità assoluta del mobile;

2.° Integrando di nuovo, avremo le ordinate x, y, z espresse per t, e così sapremo il luogo del mobile ad ogni istante;

3.° Eliminando t, rimarranno due equazioni tra x, y, z; che saranno quelle della *trajettoria*, o sia della curva descritta dal mobile.

233. *Coroll. II.* Se le coordinate si prendono ortogonali, trovasi $u\,du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

In fatti assumendo per costante l'elemento dt, sono le equazioni del moto (231)

$$P = \frac{ddx}{dt^2}; \quad Q = \frac{ddy}{dt^2}; \quad R = \frac{ddz}{dt^2}$$

Si moltiplichino rispettivamente per dx, dy, dz e si sommino; verrà

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{dxddx + dyddy + dzddz}{dt^2}$$

Ma posto che le coordinate siano ortogonali, sarà

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

onde $dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz = ds\,dds$.
Quindi

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{dsdds}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\,d\,.\,\frac{ds}{dt} = udu.$$

234. *Coroll. III.* Se le forze che sollecitano il punto mobile sono tutte in un piano, basteranno due coordinate x, y; la trajettoria giacerà tutta in quel piano, e la di lei equazione si avrà mediante l'eliminazione di t tra le due equazioni

$$P\,dt = d\,.\,\frac{dx}{dt}, \quad Q\,dt = d\,.\,\frac{dy}{dt}.$$

CAP. VI.

De' gravi projetti.

235. *Proposizione.* Sia un grave lanciato obbliquamente alla verticale con velocità dovuta all' all'altezza H. Prendendo le ascisse x nella verticale condotta nel punto di partenza, e le ordinate y parallele alla linea di projezione, l'equazione della curva descritta dal projetto è $y^2 = 4Hx$.

Ripigliamo l'equazioni generali (231)

$$P\,dt = d.\frac{dx}{dt};\quad Q\,dt = d.\frac{dy}{dt}$$

Essendo $P = g$, $Q = 0$, avremo per una prima integrazione

$$\frac{dx}{dt} = A + gt;\quad \frac{dy}{dt} = B$$

Per determinar le costanti osserviamo che al principio del moto, quando $t = 0$, la velocità nel senso delle x è $= 0$, e la velocità nel senso delle y è dovuta all'altezza H, o sia è $= \sqrt{2gH}$. Quindi $A = 0$, $B = \sqrt{2gH}$. Messi questi valori, e rinnovata l'integrazione, si ha

$$x = \frac{1}{2}gt^2\;;\; y = t\sqrt{2gH}$$

senza uopo di nuove costanti, poichè già $t = 0$ dà $x = 0$, $y = 0$. Ora eliminando t, si ottien subito $y^2 = 4Hx$.

236. *Coroll. I.* La trajettoria de' gravi projetti è una parabola, avente per diametro la verticale con-

dotta pel punto di partenza, ed il parametro di questa parabola è quadruplo dell' altezza dovuta alla velocità di projezione.

237. *Coroll. II.* Mutiamo le coordinate (Fig. 24) ed in luogo dell' ascissa $AP = x$, ed ordinata $PM = y$ introduciamo per ascissa l' orizzontale $AQ = z$, essendo ordinata la $QM = u$. Sia l'angolo di *elevazione*, o di projezione $TAQ = f$. Condotta per P l'orizzontale PR che incontri in R la MQ prolungata, sarà

$MR = PM . \text{sin.} f$; $PR = PM . \text{cos.} f$; o sia

$$u + x = y \text{ sin.} f; \quad z = y \text{ cos.} f.$$

Quindi $u = z \text{ tang.} f - x$. Altronde (235) $x = \frac{y^2}{4H} = \frac{z^2}{4H \text{cos.} f^2}$. Dunque finalmente

$$u = z \text{ tang.} f - \frac{z^2}{4H \text{cos.} f^2}.$$

238. *Coroll. III.* Cercando il valor massimo di u si avrà il vertice della parabola, indicante la massima *altezza* a cui sale il projetto. Esso corrisponde alle coordinate

$$z = H \text{ sin. } 2f; \quad u = H \text{ sin.} f^2.$$

Quindi può facilmente trovarsi o col calcolo, o per via di costruzione geometrica.

239. *Coroll. IV.* Chiamando A la portata orizzontale, o sia l' *ampiezza* del tiro AB, hassi

$$A = 2H \text{ sin. } 2f.$$

L' ampiezza è massima quando il tiro si fa ad angolo semiretto; ed è allora $A = 2H$; si hanno poi ampiezze eguali con due tiri, l' uno de' quali di tanto ecceda l'angolo semiretto di quanto l' altro ne manca.

240. *Coroll. V.* Date due fra le tre quantità A, H, f potrà trovarsi la terza; e più generalmente date tre delle quattro quantità u, z, H, f potrà aversi la quarta mediante l'equazione (237).

Si domandi per esempio qual debba essere l'elevazione del tiro affinchè il projetto colpisca un dato scopo, le cui coordinate siano $z = a$, $u = b$. Avremo (237)

$$b = a \text{ tang.} f - \frac{a^2}{4H \cos. f^2}$$

Siccome $\frac{1}{\cos. f^2} = 1 + \text{tang.} f^2$, sostituisco questo valore, e poscia risolvendo l'equazione quadratica, ottengo

$$\text{tang.} f = \frac{2H \pm \sqrt{(4H^2 - 4bH - a^2)}}{a}$$

Si può dunque, generalmente parlando, colpire un dato segno con due tiri differenti; ma se sarà $4bH + a^2 > 4H^2$, entrambi i valori diventano immaginarj, e il problema è impossibile.

CAP. VII.

Via de' projetti nell'aria.

241. Esprima gR la resistenza del mezzo. Esercitandosi questa forza secondo l'elemento ds della curva descritta dal projetto, se riferisco questa curva all'asse orizzontale condotto pel punto di partenza, chiamando x le ascisse orizzontali, ed y le ordinate verticali, e decompongo la resistenza gR in due

forze, l' una parallela alle x, l' altra alle y, sarà la prima $g R \frac{dx}{ds}$, e la seconda $g R \frac{dy}{ds}$. Adunque il grave avrà nel senso delle x la forza $-g R \frac{dx}{ds}$, e nel senso delle y la forza $-g - g R \frac{dy}{ds}$. Ciò posto la ricerca della trajettoria riducesi al problema generale dell'art. 231.

242. *Proposizione*. Determinare la trajettoria de' gravi in un mezzo resistente.

Avremo (231) l'equazioni

$$-g R \frac{dx}{ds} d t = d . \frac{dx}{dt}$$

$$-g d t - g R \frac{dy}{ds} d t = d . \frac{dy}{dt}$$

dalle quali conviene eliminare t.

Differenziando il secondo membro d' entrambe col prender costante l' elemento dx, e sostituendo dalla prima nella seconda il valore del $d d t$, vengono quest' altre due

$$ds d d t = g R d t^3 \; ; \quad d d y = -g d t^2$$

e differenziando quest' ultima

$$d^3 y = -2 g d t d d t.$$

Ora è facile eliminar da queste equazioni gli elementi $d t$, $d d t$; onde verrà

$$2 R d d y^2 + d s d^3 y = 0$$

equazione della trajettoria. E quindi data la legge della resistenza si conoscerà la curva descritta dal projetto, e viceversa.

243. *Coroll. I.* Essendo la resistenza proporzionale al quadrato della velocità, porremo (226)

$gR = gk^2 u^2 = gk^2 \frac{ds^2}{dt^2}$. Ma $dt^2 = -\frac{ddy}{g}$.

Dunque $R = -gk^2 \frac{ds^2}{ddy}$.

Onde l' equazione della trajettoria diviene

$$\frac{d^3 y}{ddy} = 2gk^2 ds$$

ed integrando $\frac{ddy}{dx^2} = A e^{2gk^2 s}$

Per determinare la costante A mettasi per ddy il suo valore $-gdt^2$; verrà

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{g}{A e^{2gk^2 s}}$$

Ora nel principio del moto quando $s = 0$, la velocità orizzontale $\frac{dx}{dt}$ è $= \cos. f \sqrt{2gH}$, chiamando f l' angolo d' elevazione, ed H l' altezza dovuta alla velocità di projezione. Di qui risulta $A = -\frac{1}{2H \cos. f^2}$, e l' equazione diviene

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{e^{2gk^2 s}}{2H \cos. f^2}.$$

244. *Coroll. II.* Un primo integrale di questa equazione può facilmente ottenersi. Pongasi per brevità $2gk^2 = h$, e $\frac{dy}{dx} = p$; e l' equazione addiverrà

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{hs}}{2H \cos. f^2}$$

Moltiplicandola per l' equazione identica $dx\sqrt{(1+p^2)}=ds$, e poscia integrando, avremo

$$p\sqrt{(1+p^2)}+\log.\left\{p+\sqrt{(1+p^2)}\right\}=C-\frac{e^{hs}}{Hh\cos.f^2}$$

La costante C si determina da ciò che quando $s=0$, dev' essere $p=\text{tang.}\,f$.

Ma non si può procedere ad ulteriore integrazione, e convien cercare de' ripieghi onde conoscere per approssimazione l' andamento della trajettoria (*).

CAP. VIII.

Modo di descrivere per approssimazione la trajettoria de' projetti nell' aria.

245. Eliminando s dalle equazioni dell' articolo precedente, e facendo per brevità

$$p\sqrt{(1+p^2)}+\log.\left\{p+\sqrt{(1+p^2)}\right\}=P,$$

avremo $dx=\frac{dp}{Ph-Ch}$; onde $dy=pdx=\frac{p\,dp}{Ph-Ch}$

Sarà dunque $x=\int\frac{dp}{Ph-Gh}$; $y=\int\frac{p\,dp}{Ph-Gh}$.

Se potessero integrarsi queste formole, avremmo x ed y date per p; ed eliminando p, avremmo l' equazione della trajettoria. Ma poichè quelle for-

(*) *V.* Borda, *Mém. de l'Acad. Paris*, 1769.
Moreau, *Journal. de l'école Polyt.*, Can. XI, p. 204
Poisson, *Traité de Mécanique*, § 234.

mole non ponno integrarsi in termini finiti, gioverà praticare il metodo insegnato da Eulero (*) onde avere gl' integrali per approssimazione. Potendo questo metodo utilmente servire come per questo, così per altri quesiti fisico matematici, merita per ciò che se ne mostri in questo caso l' applicazione.

246. *Lemma.* Sia $y = \int X dx$, e sappiasi che quando $x = a$, diventa $y = b$. Ponendovi successivamante $x = a,\ a + \delta,\ a + 2\delta,\ a + 3\delta \ldots\ldots a + n\delta$ diventi
$X = A,\quad A',\quad A'',\quad A''' \ldots\ldots A^{(n)}$
Se la differenza δ sarà piccolissima, dico che il valore dell' integrale $\int X\,d\,x$ esteso da $x = a$ sino ad $x = a + n\delta$, sarà

$$y = b + \delta \left\{ \frac{1}{2} A + A' + A'' + A''' \ldots + 1 A^{(n)} \right\}$$

Dim. Pel brevissimo intervallo compreso tra $x = a$, ed $x = a + \delta$ si può assumere che la funzione X rimanga costante. E perchè nel principio di quell' intervallo è $X = A$ e nel fine $X = A'$, si può assumere pel valor costante il medio aritmetico $X = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A'$. Adunque per quell' intervallo abbiamo $X dx = \delta \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A' \right)$, ed il valore di y da $x = a$ sino ad $x = a + \delta$, sarà
$y = b + \delta \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A' \right)$.

Pel seguente intervallo compreso tra $x = a + \delta$, ed $x = a + g\delta$ potremo similmente considerare

(*) Calc. *Int.* Tom. I, Sect. I, Cap. 7.

$X = \frac{1}{2} A' + \frac{1}{2} A''$, onde $Xdx = \delta \left(\frac{1}{2} A' + \frac{1}{2} A'' \right)$.
Sommando questo valore di Xdx col precedente, vedesi che il valore dell' y da $x = a$ sino ad $x = a + 2\delta$, sarà $y = b + \delta \left(\frac{1}{2} A + A' + \frac{1}{2} A'' \right)$.
E così si proseguirà sino all' ultimo.

247. *Proposizione I.* Costruire per via del Lemma precedente la trajettoria de' projetti.

Applicando il Lemma agl' integrali dell' art. 245, e cominciando dal primo $x = \int \frac{dp}{Ph - Ch}$, noi sappiamo che quando è $p = \text{tang.} f$ si ha $x = 0$. Ora poichè la tangente p dell' angolo che fa la curva coll' asse orizzontale dalle x si va diminuendo per gradi, sin tanto che diventa zero nel colmo della curva, e poi si fa negativa e vien sempre crescendo nel ramo discendente, facciasi succcessivamente $p = \text{tang.} f$, $\text{tang.} f - \delta$, $\text{tang.} f - 2\delta$, $\text{tang.} f - 3\delta$ ec. sino a $p = 0$; e quindi proseguendo $p = -\delta, -2\delta, -3\delta$ ec. all' infinito, pigliando per δ un numero ad arbitrio, il quale quanto più piccolo si prenderà, tanto più accurata riuscirà la descrizion della curva. Si calcolino i valori A, A', A'', A''' ec. che prende la quantità $\frac{1}{Ph - Ch}$ quando p diventa successivamente $\text{tang.} f$, $\text{tang.} f - \delta$ ec. Ed allora, ponendo successivamente $n = 1, 2, 3$ ec. all' infinito, avremo (246) i valori della x che corrispondono agli angoli $p = \text{tang.} f - \delta$, $\text{tang.} f - 2\delta$ ec. all' infinito.

Poscia per l' altra equazione $y = \int \frac{p\,dp}{Ph - Ch}$ si

calcoleranno i valori che acquista $\frac{p}{Ph - Ch}$ quando p diventa tang. f, tang. $f - \delta$ ec. e procedendo allo stesso modo si sapranno i valori della y che corrispondono agli stessi angoli $p =$ tang. $f - \delta$, tang. $f - 2\delta$ ec.

Adunque di tutti i punti della curva ne' quali p diventa di mano in mano tang. $f - \delta$, tang. $f - 2\delta$ ec. avremo le ascisse x e le corrispondenti ordinate y. Potremo dunque segnare questa serie di punti pe' quali dovrà passare la trajettoria, e così potremo descriverne l' andamento.

248. *Coroll. I.* L' ordinata y che si troverà corrispondere a $p - o$, sarà l' altezza del tiro. E la corrispondente ascissa x sarà l' ampiezza del ramo ascendente. Proseguendo il calcolo sin là dove torna $y = o$, l' ascissa corrispondente sarà la totale ampiezza del tiro, e il corrispondente valore di p ci mostrerà l' angolo col qnale il ramo discendente della curva taglia l' asse.

249. *Coroll. II.* Al di là da questo punto l' ordinata y si fa negativa, e cresce indefinitamente. Non così l' ascissa x; questa ha un limite oltre il quale non passa; ond' è a conchiudere che il ramo discendente dalla curva è terminato da un asintoto verticale.

Dim. Quando p è negativo, abbiamo

$$P = -p\sqrt{(1+p^2)} + \log.\left\{-p + \sqrt{(1+p^2)}\right\}.$$

$$\text{Ma } -p + \sqrt{(1+p^2)} = \frac{1}{p + \sqrt{(1+p^2)}}.$$

$$\text{Dunque } P = -p\sqrt{(1+p^2)} - \log.\left\{p + \sqrt{(1+p^2)}\right\}.$$

E se p oltre di essere negativo sarà anche grandissimo, potrà farsi $\sqrt{(1+p^2)} = p$, e potrà sprezzarsi il logaritmo, atteso che il logaritmo d' un numero altissimo è sprezzabile al confronto del numero istesso. Dunque allorchè p è negativo e grandissimo, abbiamo $P = -p^2$; e potendosi allora negligere anche la costante C al confronto di p, avremo $\frac{1}{Ph - Ch} = -\frac{1}{hp^2}$; e $\frac{p}{Ph - Ch} = \frac{1}{hp}$. Quindi $dx = -\frac{dp}{hp^2}$, onde $x = \text{cost.} + \frac{1}{hp}$; il qual valore non cresce già all' infinito.

Non così la y; poichè $dy = \frac{dp}{hp}$ dà $y = \text{cost.} + \frac{1}{h}\log. p$, il qual valore cresce indefinitamente insieme colla p.

250. *Proposizione II.* Costruire la trajettoria de' projetti quando l' angolo d' elevazione è piccolissimo.

Più semplice diviene allora il lavoro di costruire per approssimazione la curva; poichè declinando questa pochissimo dall' asse, può scambiarsi l'arco s coll' ascissa x, onde (244) sia

$$dp = -\frac{e^{hx}\, dx}{2H \cos. f^2}$$

Integrando in modo che $x = 0$ dia $p = \text{tang.} f$, risulta

$$p = \frac{dy}{dx} = \text{tang.} f + \frac{1 - e^{hx}}{2Hh \cos. f^2}$$

Ed integrando di nuovo così che $x = 0$ dia $y = 0$,

$$y = x \operatorname{tang.} f + \frac{1 + hx - e^{hx}}{2 \Pi h \cos. f^2}$$

onde per qualunque ascissa x potrà calcolarsi la corrispondente ordinata.

251. *Corollario.* Eguagliando a zero questo valore della y, l' equazion che ne viene, oltre $x = 0$, darà un altro valore della x, e questa sarà l' ampiezza del tiro. Eguagliando similmente a zero il valore di p l' equazion che ne viene darà la x che corrisponde all' ordinata massima, o sia l' ampiezza del ramo ascendente. E mettendo questo valore della x in quello della y, avremo l' ordinata massima, ossia l' ampiezza del tiro.

CAP. IX.

Del moto sopra una data curva, o sopra una data superficie

252. PROPOSIZIONE *I.* Determinare il moto d' un punto o elemento materiale obbligato a scorrere sopra una data superficie.

Sia l' equazione della superficie riferita a tre assi ortogonali $l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0$; muovasi sopra di essa un atomo sollecitato dalle forze P, Q, R parallele a' tre assi, e sia K la pressione che quest' atomo esercita contro la sottoposta superficie. Questa pressione non può non essere diretta secondo la perpendicolare alla superficie, poichè se fosse obbliqua potrebbe risolversi in due l' una normale,

l' altra tangenziale, e quest' ultima non farebbe pressione, il che è contro l'ipotesi. Risolvendo dunque la pressione K in tre forze parallele a' tre assi, queste saranno (3o. 101) $\frac{lK}{M}$, $\frac{mK}{M}$, $\frac{nK}{M}$, ponendo per brevità $M^2 = l^2 + m^2 + n^2$.

Ora il punto mobile si rimarrà nel medesimo stato se intendiamo che sia rimossa la sottoposta superficie, e in luogo di essa vi si applichi una forza eguale e contraria alla pressione K. Potremo dunque far conto che il punto si mova liberamente, essendo sollecitato dalle tre forze $P - \frac{lK}{M}$, $Q - \frac{mK}{M}$, $R - \frac{nK}{M}$ parallele a tre assi ortogonali. E però prendendo per costante l' elemento dt, avremo (231) le tre equazioni

$$P - \frac{lK}{M} = \frac{ddx}{dt^2};\ Q - \frac{mK}{M} = \frac{ddy}{dt^2};\ R - \frac{nK}{M} = \frac{ddz}{dt^2}.$$

253. *Coroll. I.* Per queste equazioni si determina appieno e il movimento del punto, e la pressione che esso fa contro la superficie. Poichè

1.° Chiamando u la velocità, se noi moltiplicheremo la prima equazione per dx, la seconda per dy, la terza por dz, e poi ne faremo la somma, avvertendo essere $l dx + m dy + n dz = 0$, troveremo come all' art. 233.

$$u du = P dx + Q dy + R dz$$

2.° Moltiplicandole similmente per l, m, n ed avvertendo essere $dt = \frac{ds}{u}$, la loro somma darà

$$K = \frac{lP + mQ + nR}{M} - \frac{u^2}{M} \cdot \frac{lddx + mddy + nddz}{ds^2}$$

3.° Eliminando K, rimarranno due equazioni tra le variabili x, y, z, t; alle quali se si aggiunga l' equazion data della superficie, avremo tre equazioni, onde conseguire le coordinate x, y, z espresse per t.

4.° E finalmente eliminando anche t, le due equazioni che restano fra x, y, z determineranno la trajettoria.

254. *Coroll. II.* Se il mobile non è sollecitato da veruna forza acceleratrice, il suo moto è uniforme, e per qualunque curva cammini, ritiene senza alterazione la velocità impressa.

In fatti posto $P=Q=R=0$, viene $udu=0$, onde u costante.

255. *Coroll. III.* Se il mobile è sollecitato dalla sola gravità, per qualunque curva esso discenda o risalga, avrà in ciascun punto quella velocità medesima che avrebbe se fosse disceso o risalito verticalmente per eguale altezza.

In fatti facendo l' asse delle x verticale, sarà $P=\pm g$; $Q=R=0$; quindi $u\,du=\pm g\,dx$, onde ec.

256. *Proposizione II.* Determinare il moto d' un punto obbligato a percorrere una curva tutta posta in un piano.

Questo Problema è contenuto nel precedente. Riferita la curva a due assi ortogonali posti nel di lei piano, abbia l' equazione $l dx + m dy = 0$. Le direzioni delle forze sollecitanti il punto mobile è d' uopo che siano pur nello stesso piano, altrimenti il mobile ne deviarebbe. Dunque potranno ridursi a due P, Q Parallele alle x ed alle y. Ed avremo (252) ponendo $M^2 = l^2 + m^2$,

$$P-\frac{lK}{M}=\frac{ddx}{dt^2};\quad Q-\frac{mK}{M}=\frac{ddy}{dt^2}.$$

257. *Coroll. I.* La pressione che fa il mobile contro la curva sarà

$$K=\frac{lP+mQ}{M}-\frac{u^2}{M}\cdot\frac{lddx+mddy}{ds^2}$$

E perchè $m=\frac{-ldx}{dy}$; $M=\frac{lds}{dy}$; ed il raggio osculatore $r=\frac{\pm ds^3}{dxddy-dyddx}$; fatte le sostituzioni, si troverà

$$K=\frac{Pdy-Qdx}{ds}\pm\frac{u^2}{r}$$

Vale il segno superiore se la curva è concava verso l' asse, l' inferiore se è convessa.

258. *Coroll. II.* Analizzando questa espressione di K, vedesi che il primo termine $\frac{Pdy-Qdx}{ds}$ altro non è (34) se non quella forza che nasce risolvendo ciascheduna delle forze P, Q in due, l' una secondo la tangente alla curva, l' altra secondo la normale, e prendendo la somma delle forze normali. E dalla costruzione medesima del citato art. 34 si vede che la direzione di questa forza normale fa angolo acuto colle x positive. Pertanto ove il valore di K riesca positivo, ivi la direzione della pressione farà angolo acuto colle x positive; ed ove riesca negativo, lo farà ottuso. A questo segno potremo sempre ravvisare, quando sarà che la pressione sospinga il corpo contro la curva, e quando lo stacchi dalla medesima, forzandolo ad abbandonarne la traccia.

259. *Coroll. III.* Essendo K l' aggregato de' due termini $\frac{P\,dy - Q\,dx}{d\,s}$ ed $\frac{u^2}{r}$, la pressione espressa dal primo termine trae l' origine, come testè dicevamo, da quella porzione delle forze sollecitanti, che spingendo normalmente contro la curva, rimane elisa dalla resistenza di quella. Ma la pressione espressa dal secondo termine è indipendente dalle forze sollecitanti, ed ha luogo ancora quando non v' è forza sollecitante veruna, ed il corpo si muove soltanto in causa di velocità preconcepita. Questa pressione si distingue col nome di *Forza centrifuga*, e trae origine dall' inerzia del mobile, come tosto dichiareremo.

260. *Scolio.* Scenda il mobile per la curva AMB (Fig. 25) e nel tempetto $d\,t$ abbia passato lo spazietto Mm. Giunto in m esso tende per l' inerzia a percorrere nel seguente tempetto $= d\,t$, la retta $m\,q = M\,m$. Siccome la resistenza della curva lo costringe a piegare pel latercolo $m\,\mu$, così risolvendo la volocità virtuale $m\,q$ nelle due $m\,\mu$, $m\,p$, quest' ultima rimane elisa dalla curva, e perciò il mobile la premerà normalmeute colla forza corrispondente a questa velocità estinta; e questa sarà la forza centrifuga.

Esprimiamone analiticamente il valore. Questa forza nel momento $d\,t$ farebbe percorrere al mobile lo spazietto $m\,p$; essa può aversi per costante, giacchè si considera agire per un solo istante $d\,t$. Dunque dall' equazione (214) $g = \frac{2\,s}{t^2}$ scorgesi che questa forza è $= \frac{2\,m\,p}{d\,t^2}$.

Sia r il raggio osculatore della curva AMB nel punto m. L'arco $Mm\mu$ potrà aversi per un arco circolare del raggio r. Per la proprietà del circolo mq è media proporzionale tra $m\mu$, ed $m\mu + 2r$, ossia tra $m\mu$, e $2r$. Dunque $m\mu = \frac{mq^2}{2r}$. Ma $mq = Mm = ds = u\,dt$. Dunque $m\mu = \frac{u^2 dt^2}{2r}$. Sostituito questo valore, la forza centrifuga ritrovasi espressa per $\frac{u^2}{r}$, appunto come avevamo per altra strada conchiuso nell' articolo precedente.

CAP. X.

Discesa de' gravi pei piani inclinati.

261. Proposizione I. Un grave posato sopra un piano inclinato discenderà per la linea retta perpendicolare alla comun sezione del piano coll' orizzonte.

Dim. Si posi il grave in A (Fig. 26) sul piano inclinato I, e sia RS la comun sezione di questo piano coll' orizzontale O. Nel piano I si conduca la AB, e nel piano O la BC, entrambe perpendicolari ad RS. Il piano ABC sarà perpendicolare al piano O, e però sarà verticale, e sarà non meno perpendicolare al piano I. Risolvendo dunque la gravità che agisce secondo la verticale AC in due forze, l' una delle quali sia diretta lungo AB, l' altra sarà perpendicolare al piano I. Questa pertanto verrà del tutto elisa, e il grave spinto dall'altra forza s' incamminerà per AB.

E perchè questo discorso come vale pel punto A, così per qualunque altro punto della retta AB, è manifesto che il grave incamminato per la AB, discenderà per essa continuamente.

262. *Corollario.* Se il grave non sarà semplicemente posato sul piano I, ma lanciato secondo una direzion qualunque AT, descriverà sul piano stesso la parabola AQ, che avrà per tangente AT, per diametro AB, e per parametro il quadruplo dell' altezza dovuta alla velocità di projezione.

263. *Proposizione II.* Declini il piano I della verticale coll' angolo $BAC = m$. La forza che sollecita il grave discendente lungo la retta AB sarà $= g \cos. m$. E la forza colla quale il grave premerà il piano stesso, sarà $= g \sin. m$.

264. *Coroll. I.* Se la lunghezza AB del piano rappresenti la gravità, l' altezza AC ne rappresenta quella parte che s' adopra nello spingere il grave lungo il piano, e la base BC rappresenta l' altra parte che s' adopra nel premere il piano.

265. *Coroll. II.* Il moto di discesa è equabilmente accelerato, e si determina colle equazioni (210)

$$u = g t \cos. m ; \; s = \frac{u^2}{2 g \cos. m} ; \; s = \frac{g t^2 \cos. m}{2} .$$

Che se il grave sale pel piano in virtù d' una velocità impressa, il moto sarà equabilmente ritardadato, e si determinerà parimente colle equazioni (216) per tutto in luogo di g ponendo $g \cos. m$.

266. *Coroll. III.* Le velocità acquistate, e gli spazj percorsi in egual tempo da due gravi cadenti l' uno per la verticale, l' altro pel piano inclinato, sono fra loro come $1 : \cos. m$; o sia come la lunghezza del piano all' altezza.

267. *Coroll. IV.* Quindi nel mentre che il primo discende per tutta l' altezza AC, l' altro arriva al punto D ove cade la perpendicolare CD condotta da C sopra il piano AB.

268. *Coroll. V.* Tutte le corde d' un circolo che partono dall' una delle due estremità d' un diametro verticale sono percorse nello stesso tempo; cioè in quello nel quale il grave liberamente cadendo percorrerebbe quel diametro.

CAP. XI.

Discesa de' gravi per la Cicloide.

269. PROPOSIZIONE *I.* Sia la cicloide FAC (Fig. 27) costituita colla base FG orizzontale, ed un grave collocato nel punto P e quivi abbandonato a se medesimo discenda per l' arco PMA. Vuolsi determinare la velocità del mobile in qualsivoglia punto M, e la pressione che farà contro la curva.

Sia $AR = x$, $RM = y$, $AM = s$, e sia il diametro del circolo generatore $AB = \frac{1}{2}a$, e l' ascissa del punto di partenza $AS = h$. L' equazione della cicloide è $sds = adx$; dalla quale si deduce

$$ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}\,;\quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{a-2x}{a}}$$

ed il raggio osculatore $r = \sqrt{(a^2 - 2ax)}$.

Ciò posto, la velocità in M sarà (255) dovuta all' altezza SR, onde avremo $u = \sqrt{2g(h-x)}$.

Essendo poi $P = -g$, $Q = 0$, sarà la pressione (257)

$$K = -\frac{g\,dy}{ds} - \frac{u^2}{r} = -\frac{g}{\sqrt{a}} \cdot \frac{a + 2h - 4x}{\sqrt{(a - 2x)}}$$

Questo valore essendo sempre negativo, la pressione farà (258) angolo ottuso colle x positive, e però sarà diretta secondo $M M'$, e spingerà il corpo contro la curva.

270. *Coroll. I.* Il tempo della discesa per l' arco $P M$ si avrà dall' equazione

$$dt = -\frac{ds}{u} = -\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(hx - x^2)}}$$

Integrando così che $x = h$ dia $t = 0$, avremo

$$t = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \cdot \text{Arc. cos.} \frac{2x - h}{h}$$

271. *Coroll. II.* Facendo $x = 0$, avremo il tempo della totale discesa da P sino al punto infimo A, e sarà $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$.

Questo valore è affatto indipendente dal sito del punto di partenza P; onde si deduce la singolarissima proprietà della cicloide, che da qualunque punto della sua circonferenza si abbandoni il grave, esso arriva al punto infimo nello stesso tempo. Per questa proprietà dicesi la cicloide *tautocrona*.

272. *Coroll. III.* Giunto il grave al punto infimo A colla velocità dovuta alla discesa AS risalirà per l' arco opposto $A Q$. In ciaschedun punto della salita la sua velocità sarà la stessa che nel punto omologo della discesa, ossia nel punto che corrisponde alla medesima ascissa verticale. Ed arrivato al punto Q egualmente alto del punto P, si fer-

merà, ricadendo poi subito per l' arco QA, e risalando per AP, e così ricalcherà infinite volte la stessa traccia. Il tempo della salita per AQ sarà $\frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$ pari a quello della discesa per PA.

273. *Proposizione II.* Cercasi la curva della più breve discesa da un dato punto A (Fig. 28) ad un altro dato punto B.

Facciasi asse delle x la verticale AP, e sarà la velocità nel punto $M = \sqrt{2gx}$, e il tempo della discesa per AM sarà rappresentato dall' integrale $\int \frac{ds}{\sqrt{2gx}}$. Quest' integrale esteso dal punto A al punto B dovrà essere un minimo. Dunque secondo la Teorica del Calcolo delle Variazioni converrà porre $\delta \int \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = 0$; ossia facendo $dy = pdx$, onde $ds = dx\sqrt{(1+p^2)}$, converrà porre $\delta \int \frac{dx\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}} = 0$. Per le regole del Calcolo delle Variazioni hassi l' equazione della cercata curva differenziando la quantità $\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{2gx}}$ e mettendo il coefficiente del dp eguale ad una costante. Sarà dunque quest' equazione

$$\frac{p}{\sqrt{2gx(1+p^2)}} = C$$

oppure facendo per brevità $\frac{1}{2gC^2} = k$

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{k-x}}$$

equazione d' una cicloide che ha l' origine nel pun-

to A, la base nell' orizzontale AL condotta per A, e il diametro del circolo generatore $= k$.

Se dunque si guidi l' orizzontale indefinita AL e sopra di essa come base descrivasi dal punto A la cicloide AQL che passi pel dato punto B, sarà dessa la linea della brevissima discesa da A in B. Per tale proprietà dicesi la cicloide *brachistocrona*.

274. *Scolio*. Il descrivere dal punto A sulla base indefinita AL la cicloide che passi pel dato punto B è problema geometrico, del quale ecco la soluzione semplicissima (*). Descrivasi dal punto A sull' indefinita AL una cicloide qualsiasi Aql, della quale sia oq il diametro del circolo generatore. Congiunta AB, tagli essa nel punto b questa cicloide Aql. Si faccia come Ab ad AB, così oq al quarto termine; e questo sarà il diametro OQ del circolo generatore della cicloide AQL che passerà pel dato punto B.

CAP. XII.

Discesa de' gravi per archi circolari.

275. Proposizione I. Sia PAG (Fig. 29) un arco di cerchio, e cadendo per esso il grave dal punto P vogliasi determinare in cadaun punto M la velocità e la pressione.

Sia $AR = x$, $RM = y$, $AM = s$; sia il raggio $CA = a$, e l' ascissa del punto di partenza

(*) Jo. Bernoulli, *Op.* Tom. I, pag. 192.

$AS = h$. Avremo per la natura del circolo

$$ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x)}}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{a - x}{x}$$

ed il raggio osculatore $r = a$.

La velocità in M sarà dovuta all' altezza SR; onde $u = \sqrt{2g(h - x)}$.

Ed essendo $P = -g$, $Q = o$, sarà la pressione

$$K = -\frac{g\,dy}{ds} - \frac{u^2}{r} = -\frac{g}{a}(a + 2h - 3x).$$

Questo valore è sempre negativo e mostra che la pressione sarà sempre diretta nel senso MM'.

276. *Coroll. I.* Per determinare il tempo della discesa abbiamo l' equazione

$$dt = -\frac{ds}{u} = -\frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(h - x)(2ax - x^2)}}$$

la quale integrata da $x = h$ sino ad $x = o$ darebbe il tempo della discesa da P in A.

277. *Coroll. II.* Ma quest' equazione non può integrarsi se non che per serie. Si ottiene una serie convergente, scrivendo l' equazione in questa forma

$$dt = -\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{dx\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(hx - x^2)}}$$

e svilluppando il numeratore colla serie Neutoniana del binomio, che dà

$$\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^2}{4a^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^3}{8a^3} \text{ec.}$$

Così dt vien espresso con una serie d' infiniti termini, tutti della forma $-\frac{Ax^n dx}{\sqrt{(hx - x^2)}}$. Per le

conosciute regole del Calcolo sublime l' integrale di ciascheduno di questi termini si fa dipendere dall' integrale $\int \frac{-dx}{\sqrt{(hx-x^2)}}$ il quale integrale preso da $x=h$ sino ad $x=0$ trovasi $=\pi$. Con questo progresso si avrà

$$t=\frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2a}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{h^2}{4a^2}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{h^3}{8a^3}\text{ec.}\right\}$$

E questa serie è sempre convergente, perchè h si assume sempre minore di a.

278. *Coroll. III.* Se h è piccolissimo a fronte di a, molto più lo sarà x, ed allora l' equazione differenziale (276) trascurando x^2 a fronte del $2ax$, si ridurrà

$$dt=-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(hx-x^2)}}$$

compagna di quella (270) che appartiene alla cicloide.

Dal che si vede che gli archi circolari, la saetta de' quali è molto piccola in confronto del raggio, o sia gli archi circolari di pochissimi gradi godono al pari della cicloide di quella singolare proprietà, che da qualunque punto dell'arco si lasci cadere un grave, esso arriva al punto infimo nello stesso tempo $t=\frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$.

279. *Proposizione II.* Sia lo stesso arco circolare FaG posto al rovescio, ed il grave collocato nel punto p discenda pel convesso della circonferenza. Domandasi la velocità e la pressione in ciaschedun punto m.

La velocità sarà dovuta alla discesa sr, onde fatto $ar=x$, $as=h$ avremo $u=\sqrt{2g(x-h)}$.

Ed essendo $P = g$, $Q = 0$, avremo la pressione

$$K = \frac{g\,dy}{ds} - \frac{u^2}{r} = \frac{g}{a}\,(a + 2h - 3x).$$

280. *Corollario.* Mentre è $x < \frac{a + 2h}{3}$, vien K positivo, e la pressione si volge nel senso $m\,m'$. Quando $x = \frac{a + 2h}{3}$, viene $K = 0$. Diventando poi $x > \frac{a + 2h}{3}$, si fa K negativo ed il mobile fuggì via dalla curva.

Adunque il grave verrà scorrendo sul cerchio l' arco $p\,t$ terminato dall' ascissa $a\,q = \frac{a + 2h}{3}$, e rispondente alla saetta $s\,q = \frac{a - h}{3} = \frac{1}{3}\,Cs$. Giunto in t scapperà fuori della curva, descrivendo una parabola che avrà la tangente comune col circolo nel punto t, il diametro verticale, ed il parametro $= 4 \sqrt{2g \cdot s\,q}$.

CAP. XIII.

Del Pendolo semplice.

281. *Proposizione I.* Rimossa ogni resistenza ed ogni impulso straniero le oscillazioni d' un pendolo grave continuano all' infinito eguali tra loro, ed isocrone.

In fatti dalle cose dette agli art. 218. 255 apparisce che il grave salirà in pari tempo ad un' altezza uguale a quella onde scese; indi ritornerà per

la stessa via, ricalcando senza fine l' arco che da prima descrisse.

E ciò si avvera qualunque siasi la curva che il pendolo oscillando descrive. Veggiamo ora partitamente quello che avvenga ai pendoli oscillanti per archi di cicloide, o di circolò.

282. *Proposizione II.* Le oscillazioni per archi cicloidali di qualsivoglia ampiezza sono isocrone.

E se chiameremo $\frac{1}{2}a$ il diametro del cerchio generatore della cicloide, il tempo della mezza oscillazione, cioè della corsa per l' arco PA (Fig. 27) è $t = \frac{\pi \sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$; e quello dell' oscillazione intera, cioè della corsa per l'arco PAQ è $t = \frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. (271. 272)

283. *Scolio.* Essendo la cicloide evoluta di se medesima, si ottiene il pendolo cicloidale facendo oscillare il filo CA tra due lame CF, CG curvate a foggia di due semicicloidi eguali e similmente poste alle semicicloidi GA, FA. Dal che si vede che la lunghezza del filo CA dev' essere doppia di BA; e però $CA = a$.

In generale può farsi che il pendolo descriva una curva qualunque, facendo muoversi il filo tra due lame piegate secondo l' evoluta di essa curva. Se il filo CA è libero, il pendolo descriverà un arco di cerchio.

284. *Proposizione III.* Le oscillazioni per archi circolari di picciol numero di gradi sono isocrone, qualunque siasi l' ampiezza dell' arco descritto; e

sono sincrone a quelle d' un pendolo cicloidale d' eguale lunghezza.

Chiamando a il raggio del circolo, o sia la lunghezza del pendolo, sarà il tempo della mezza oscillazione $t = \frac{\pi \sqrt{a}}{2 \sqrt{g}}$, e quello dell' oscillazione intera sarà doppio (278).

285. *Corollario.* Paragonando fra loro le oscillazioni di pendoli di lunghezza diversa, o siano essi cicloidali, oppure circolari, purchè scorrano per piccoli archi di cerchio, i tempi delle oscillazioni sono come le radici delle lunghezze.

E per conseguenza i numeri delle oscillazioni fatte nello stesso tempo sono inversamente come le radici delle lunghezze.

286. *Scolio.* L' isocronismo delle oscillazioni per archi cicloidali di qualunque ampiezza o per archi circolari d' ampiezza minima, si può provare anche senza uopo d' integrazione nel modo seguente.

Siano terminati al punto infimo A (Fig. 30) i due archi di diversa ampiezza PA, pA. S' intenda diviso l' arco PA in un numero indefinito di elementari particelle PM, e l' arco pA in egual numero d' elementi pm. Se le forze acceleratrici colle quali il grave entra a descrivere gli archetti omologhi PM, pm sono proporzionali agli archetti medesimi, quegli archetti saranno descritti in egual tempo. Poichè essendo (210) $t^2 = \frac{2s}{g}$, egli è chiaro che se g è proporzionale ad s, sarà t costante. E se ciò avvenga in ciascuno de' punti omologhi degli archi PA, pA, è palese che ciascuno degli ele-

menti del primo sarà percorso in pari tempo dell'elemento corrispondente dal secondo, e così anche gli archi interi PA, pA saranno descritti contemporaneamente.

Ora o sia la curva PpA una cicloide, o sia un arco circolare di poca ampiezza, avviene appunto che le forze acceleratrici tangenziali in due punti omologhi qualunque P, p, sono proporzionali agli archi PA, pA, e quindi ancora agli elementi PM, pm. Sia in fatti $AE=x$, $EP=y$, $AP=s$. La forza tangenziale in P sarà (34) $\frac{-g\,dx}{ds}$.

Qui se PpA è una cicloide, abbiamo $s^2=2ax$, e quindi $\frac{dx}{ds}=\frac{s}{a}$; dunque $\frac{g\,dx}{ds}=\frac{gs}{a}$; e però la forza tangenziale in P è proporzionale all'arco PA.

Se poi PpA è un arco di cerchio, abbiamo $\frac{dx}{ds}=\frac{y}{a}$; quindi $\frac{g\,dx}{ds}=\frac{gy}{a}$. Ove se l'arco è assai piccolo la mezza corda y confondesi coll'arco s, onde qui pure la forza tangenziale in P è di nuovo proporzionale a PA.

CAP. XIV.

Moto de' pendoli ne' mezzi resistenti.

287. Oscillando il pendolo in un mezzo resistente, le vibrazioni vanno gradatamente restringendosi in ampiezze sempre minori. E tuttavia purchè l'ampiezza iniziale sia piccola, e piccola ancora la

resistenza, queste vibrazioni tuttochè diseguali si mantengono sensibilmente isocrone fra loro, e quasi isocrone a quelle d' un pendolo di pari lunghezza che liberamente oscilli nel vuoto. Faranno di ciò piena fede le Proposizioni seguenti (*).

288. *Proposizione I.* Oscilli il pendolo per l'arco cicloidale PAQ (Fig. 30), partendosi dal punto P. Si cerca la velocità in ogni punto dell' arco.

Qui oltre la gravità si mette in conto la resistenza del mezzo espressa (226) per gk^2u^2, la qual forza agisce lungo l' archetto ds in senso contrario al moto attuale. Risolvendo questa forza secondo le x e le y avremo le due componenti $gk^2u^2 . \frac{dx}{ds}$, $gk^2u^2 . \frac{dy}{ds}$. Quindi $P = -g + gk^2u^2 . \frac{dx}{ds}$; $Q = gk^2u^2 . \frac{dy}{ds}$.

Onde $udu = Pdx + Qdy = -gdx + gk^2u^2ds$. Pongo per la natura della cicloide $adx = sds$, e faccio per brevità $2gk^2 = h$. Verrà

$$2audu - ahu^2ds = -2gsds.$$

Quest' equazione rendesi integrabile pel moltiplicatore e^{-hs}. Integro adunque, e chiamando c la velocità che avrà il grave giunto al punto infimo A, determino la costante così che quando $s = 0$, venga $u = c$. Ed ho l' equazione

$$(M) \quad u^2 = e^{hs} c^2 + \frac{2g}{ah^2} \left(1 + hs - e^{hs}\right)$$

(*) Euler, *Mechanica*. Tom. II, Prop. 63.

che mostra il progresso della velocità nell' arco della discesa PA.

Facendovi s negativo ho similmente per l' arco della salita AQ l'equazione

$$(N) \quad u^2 = e^{-hs} c^2 + \frac{2g}{ah^2}\left(1 - hs - e^{-hs}\right).$$

289. *Coroll. I.* Sia $PA = E$, $AQ = F$. Egli è manifesto che se nell' equazione (M) faremo $s = E$, saravvi $u = 0$; e se nell' equazioue (N) porremo $s = F$, sarà parimente $u = 0$. Di qui potremo avere espressa in due modi la velocità c corrispondente al punto infimo.

L' equazione (M) darà

$$\frac{ah^2c^2}{2g} = -e^{-hE}\left(1 + hE - e^{hE}\right)$$

$$= \frac{1}{2} h^2 E^2 - \frac{1}{3} h^3 E^3 + \frac{1}{8} h^4 E^4 - \text{ec.}$$

Similmente l' equazione (N) darà

$$\frac{ah^2c^2}{2g} = -e^{hF}\left(1 - hF - e^{-hF}\right)$$

$$= \frac{1}{2} h^2 F^2 + \frac{1}{3} h^3 F^3 + \frac{1}{8} h^4 F^4 + \text{ec.}$$

290. *Coroll. II.* Eguagliando fra loro queste due espressioni, verremo a scoprire la relazione tra i due archi E, F onde dato il primo si conosca il secondo. Hassi questa relazione dall' equazione

$$e^{-hE}(1 + hE) = e^{hF}(1 - hF).$$

Qui se facciamo $F = E - mE^2 + nE^3 - pE^4$ ec. e fatta la sostituzione, svolgendo tutto in serie, determiniamo i coefficienti m, n, p ec. troveremo

$$F = E - \frac{2}{3} hE^2 + \frac{4}{9} h^2 E^3 - \text{ec.}$$

Se l'arco E sia piccolo, e piccola ancora la resistenza, pochi termini della serie basteranno. Noi per ora ci fermeremo nei tre primi, disprezzando le potenze di h superiori al quadrato.

291. *Coroll. III.* Conosciuto l' arco della salita nella prima oscillazione, si trovano senza fatica quelli delle seguenti. E già nella seconda oscillazione, cioè nel ritorno del pendolo l'arco della discesa sarà F, e però la salita sarà

$$F - \frac{2}{3} h F^2 + \frac{4}{9} h^2 F^3$$

o sia

$$E - \frac{4}{3} h E^2 + \frac{16}{9} h^2 E^3.$$

Similmente nella terza oscillazione la salita si troverà

$$E - \frac{6}{3} h E^2 + \frac{36}{9} h^2 E^3$$

e nella $n$esima sarà

$$E - \frac{2}{3} n h E^2 + \frac{4}{9} n^2 h^2 E^3$$

Così dopo n oscillazioni la differenza fra la prima e l' ultima salita sarà

$$\frac{2}{3} n h E^2 - \frac{4}{9} n^2 h^2 E^3.$$

Di qui si vede come e per quali gradi la corsa del pendolo vada continuamente accorciandosi. Ed è notabile che questo accorciamento non dipende punto dalla lunghezza del pendolo.

292. *Coroll. IV.* È anche degno d' osservazione che la velocità massima del grave oscillante non corrisponde già al punto infimo A, ma ad un altro punto B. Questo punto si troverà giusta le note re-

gole, eguagliando a zero il differenziale di u^2 (288). Sia $AB = S$, e la velocità massima in $B = C$. L'equazion del massimo sarà

$$(L) \qquad e^{-hS} = 1 - \frac{a h^2 c^2}{2g}.$$

Pongasi per $\frac{a h^2 c^2}{2g}$ il suo valore (289) e svolgendo in serie come sopra si fece (290) avrassi

$$S = \frac{1}{2} h E^2 - \frac{1}{3} h^2 E^3 + \frac{1}{4} h^3 E^4 - \text{ec.}$$

293. *Coroll. V.* Poscia nell' equazione (M) ponendo per e^{-hs} il suo valore tratto dall' equazione (L) avremo

$$\frac{a h^2 C^2}{2g} = h S = \frac{1}{2} h^2 E^2 - \frac{1}{3} h^3 E^3 + \frac{1}{4} h^4 E^4 - \text{ec.}$$

Così sapremo qual sia ed in qual punto s' acquisti la massima velocità.

294. *Proposizione II.* Poste le stesse cose, si cerca il tempo dell' oscillazione per l' arco PAQ.

Giova cercar prima il tempo della discesa per PB, indi il tempo per BQ, e sommar poscia questi due tempi.

Facciasi pertanto $PB = q$, e sarà

$$s = q + S = q + \frac{a h C^2}{2g}.$$

Ora nell' equazione (M) io pongo in luogo di s questo valore, ed in luogo di c^2 il suo valore desunto dall' equazione (L); poi faccio $C^2 - u^2 = z$. Ed essa mi diviene

$$\frac{a h^2 z}{2g} = e^{hq} - 1 - hq$$

onde svolgendo in serie col solito mezzo (290) ricavo

$$q = \frac{\sqrt{az}}{\sqrt{g}} - \frac{ahz}{6g} + \frac{ah^2 z\sqrt{az}}{36\, g\sqrt{g}} - \text{ec.}$$

Onde

$$dt = -\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{\sqrt{(C^2 - z)}} = -\frac{dz\sqrt{a}}{2\sqrt{g}\sqrt{(C^2 z - z^2)}}$$

$$+\frac{ahdz}{6g\sqrt{(C^2 - z)}} - \frac{ah^2 zdz\sqrt{a}}{24g\sqrt{g}\sqrt{(C^2 z - z^2)}} + \text{ec.}$$

Integrando da $u = 0$, o sia $z = C^2$ sino ad $u = C$, o sia $z = 0$, si trae

$$t = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} - \frac{ahC}{3g} + \frac{\pi h^2 C^2 a\sqrt{a}}{48\, g\sqrt{g}} - \text{ec.}$$

che sarà il tempo della discesa per PB.

In simil guisa si avrà il tempo per BQ rinnovando il calcolo col fare q, e dq negativi, ed integrando da $z = 0$, sino a $z = C^2$. E sarà questo tempo

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} + \frac{ahC}{3g} + \frac{\pi h^2 C^2 a\sqrt{a}}{48\, g\sqrt{g}} + \text{ec.}$$

Or sommando i due tempi si avrà finalmente il tempo dell' intera corsa per PBQ così espresso

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left(1 + \frac{ah^2 C^2}{24\, g} + \text{ec.}\right)$$

295. *Coroll. I.* Pongasi in luogo di $\frac{ah^2 C^2}{2g}$ il suo valore (293). Sarà il tempo dell' oscillazione

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left(1 + \frac{1}{24} h^2 E^2 - \frac{1}{36} h^3 E^3 \text{ ec.}\right)$$

Nel vuoto il tempo dell' oscillazione sarebbe stato $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$ (282).

Adunque la resistenza del mezzo ritarda alquanto

l' oscillazione. Ben si vede che per poco che h ed E siano piccole frazioni, questo ritardo del pendolo oscillante nel mezzo sopra di quello che oscilla nel vuoto rendesi presso che insensibile, e sempre più lo diviene a misura che restringendosi le oscillazioni va decrescendo l' arco della discesa.

296. *Coroll. II.* A più forte ragione è insensibile il divario del tempo da un' oscillaziane all' altra. Infatti nella seconda oscillazione il tempo è

$$\frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1}{24} h^2 F^2 - \frac{1}{36} h^3 F^3 \text{ ec.} \right)$$

o sia $\frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{1}{24} h^2 E^2 - \frac{1}{12} h^3 E^3 + \text{ec.} \right)$

così che la seconda oscillazione è più breve della prima del tempo $\frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{h^3 E^3}{18}$ — ec. divario che nella nostra ipotesi è disprezzabile.

Pertanto quantunque ne' mezzi resistenti secondo il quadrato della velocità la cicloide non sia rigorosamente tautocrona, e le oscillazioni si vadano affrettando a misura che si restringono, pure quando gli archi sian piccoli e piccola la resistenza, si può trascurare il divario.

297. *Scolio.* Tutto ciò che s' è detto de' pendoli cicloidali si può trasferire ai circolari nell' adottato supposto che la corsa del pendolo sia limitata ad archi di piccola ampiezza. Adunque anche in questi pendoli la resistenza dell' aria va sensibilmente stringendo le oscillazioni, senza turbarne sensibilmente l' isocronismo.

SEZIONE SECONDA

DEL MOTO DE' SISTEMI DI FORMA INVARIABILE.

CAP. XV.

Del Moto de' Sistemi in generale.

298. Vedute le leggi del moto d' un punto o sia d' un atomo materiale, consideriamo ora un sistema di punti così tra loro connessi che in grazia di questa connessione non possono prendere que' movimenti che loro imprimono le forze applicate, ma siano costretti a muoversi d'altra guisa.

299. *Proposizione.* Sia un sistema di punti i quali per le forze applicate dovessero concepire le velocità A, B, C ec. ma in grazia della scambievole connessione prendano in vece la velocità a, b, c ec. La velocità impressa A si risolva nell' attuale a, ed in un' altra α; similmente la velocità B si risolva nelle due b, β; e la velocità C nelle due c, γ ec. Dico che le forze corrispondenti alle velocità α, β, γ ec. si fanno equilibrio fra loro.

In fatti poichè le velocità α, β, γ ec. non hanno effetto, è d' uopo che le forze corrispondenti s' elidano e s' annullino scambievolmente.

300. *Corollario.* Quindi v' ha equilibrio tra le forze *impresse*, ossia corrispondenti alle velocità A, B, C ec. e le forze *attuali*, ossia corrispondenti alle velocità a, b, c ec. purchè queste ultime s' intendano rivolte in senso contrario.

In fatti se A è la risultante delle forze a, α, sarà reciprocamente α la risultante delle forze A,—a. E così β sarà la risultante della B, — b ec. Ma le forze α, β, γ ec. si fanno equilibrio (299). Dunque le forze A, B, C ec. fanno equilibrio alle forze — a, — b, — c ec. Il che ec.

301. *Scolio.* Egli è questo il principio che Dalembert con tanta lode introdusse nella Dinamica, traendone un metodo generale per la soluzione de' più astrusi problemi. Questo metodo consiste nel sostituire alle forze impresse al sistema due classi di forze equivalenti. Quelle della prima classe sono atte ad imprimer tai moti che ciascun punto possa seguire liberamente senza fare intoppo agli altri o soffrirne: quelle della seconda per lo contrario son tali che si equilibran tutte fra loro. Le prime ottengono pienamente il loro effetto, e determinano il moto attuale del sistema: le seconde si elidono totalmente, e determinano la pressione che soffre ciascun punto del sistema per l' azion vicendevole delle parti.

CAP. XVI.

Del Momento d' inerzia.

302. *Momento d' inerzia* d' un sistema rispetto d' un asse dicesi la somma de' prodotti che nascono moltiplicando ciaschedun elemento del sistema pel quadrato della sua distanza dall' asse.

303. *Coroll.* Il momento d'inerzia è sempre quantità positiva, e sempre cresce, crescendo la massa del sistema.

304. *Proposizione I.* Sia S il momento d' inerzia d' un sistema rispetto d' un asse che passi pel suo centro di gravità, S' il momento d' inerzia dello stesso sistema rispetto d' un altro asse parallelo al primo, e distante da esso per l' intervallo k: sia finalmente M la massa del sistema. Sarà

$$S' = S + Mk^2.$$

Sia GG (Fig. 31) l' asse condotto pel centro di gravità del sistema, CC l' altro asse parallelo al primo. Sia in M un elemento del sistema, del qual elemento chiameremo la massa dM. Per M intendesi condotto un piano perpendicolare agli assi GG, CC; si conducano in esso le rette MG, MC, e si unisca CG, sulla quale cada dal punto M la perpendicolare MP. Sarà

$$S = \Sigma . dM . MG^2 ; \quad S' = \Sigma . dM . MC^2.$$

Ora è $MC^2 = MP^2 + CP^2$; ed $MP^2 = MG^2 - GP^2$ e $CP^2 = (GP + CG)^2$. Quindi

$$\Sigma . dM . MC^2 = \Sigma . dM . MG^2$$
$$+ \Sigma . 2dM . CG . GP + \Sigma . dM . CG^2$$

o sia

$$S' = S + 2k\Sigma . dM . GP + Mk^2.$$

Or si avverta che il prodotto $dM . GP$ esprime il momento dell' elemento dM (54) riferito ad un piano condotto per GG normalmente alla retta CG. Perciò (56) $\Sigma . dM . GP = 0$. Rimane pertanto $S' = S + Mk^2$. Il che ec.

305. *Coroll. I.* Conoscendosi il momento d' inerzia d' un sistema rispetto d' un asse, agevolmente si trova lo stesso momento rispetto d' un asse parallelo al primo.

306. *Coroll. II.* Di tutti gli assi paralleli fra loro a' quali si può riferire un sistema, quello che passa pel centro di gravità dà il minimo momento d' inerzia.

307. *Proposizione II.* Trovare il momento d'inerzia d' un dato sistema rispetto d' un asse dato.

Il metodo generale per questa ricerca consiste palesemente nell' esprimere analiticamente per mezzo delle coordinate x, y, z il prodotto dell' elemento pel quadrato della sua distanza dall' asse, quindi integrare per tutta l' estension del sistema. Nel che invece dell' asse dato si potrà prendere un altro qualunque ad esso parallelo, ove ciò serva ad agevolare il calcolo, potendosi poscia per la Proposizion precedente trasferir facilmente il momento trovato da un asse all' altro.

Cercasi talora il momento d' inerzia delle linee e figure geometriche, attribuendo ai loro elementi una massa proporzionale alla loro estensione. Assegneremo ne' seguenti corollarj il momento d' alcune figure più semplici, illustrando così l' accennato metodo con varj esempj.

308. *Coroll. I.* Si cerca il momento d' inerzia d'una retta di lungezza a rispetto d' un asse elevato perpendicolarmente alla medesima nella sua estremità.

L' elemento è dx; la sua distanza dall' asse è x. Quindi il momento $= \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$; e compiendo l' integrale col porre $x = a$, viene $\frac{a^3}{3}$, espressione cercata.

In questo esempio, come pure ne' seguenti, chiameremo M la massa del sistema. Qui sarà $M = a$; onde il momento d' inerzia esprimesi ancora così $\frac{1}{3} M a^2$.

Se l' asse fosse elevato sul centro di gravità della retta data, o sia sul suo punto di mezzo, sarebbe il momento d' inerzia $\frac{1}{12} a^3$ o sia $\frac{1}{12} M a^2$.

309. *Coroll. II.* Si cerca il momento d' inerzia della periferia d' un cerchio di raggio a rispetto d' un asse condotto pel centro, e perpendicolare al piano del cerchio.

L' elemento essendo $= d s$, e la sua distanza dall' asse $= a$, sarà il momento $= \int a^2 d s = a^2 s$, e compiendo l' integrale col porre $s = 2 \pi a$, viene il momento suddetto $= 2 \pi a^3 = M a^2$.

310. *Coroll. III.* Vogliasi il momento d' inerzia della periferia rispetto d' un diametro del cerchio.

L' elemento è $d s = \frac{a d x}{y}$; la sua distanza dal diametro è y. Quindi il momento elementare è $= a y d x$; ed il momento totale $= a \int y d x$. Ma l' integrale $\int y d x$ esteso a tutto il cerchio è l' area del cerchio stesso $= \pi a^2$. Dunque il cercato momento è $= \pi a^3 = \frac{1}{2} M a^2$.

311. *Coroll. IV.* Si cerca il momento d' inerzia d' un cerchio di raggio a rispetto d' un asse elevato nel centro, e perpendicolare al suo piano.

Sia (Fig. 32) $C R = a$ il raggio del cerchio; se ne prenda una parte $C M = z$ ed intendasi de-

scritto col raggio $CM = z$ il cerchio MM', e col raggio $Cm = z + dz$ il cerchio prossimo mm'. L'area della zona compresa da questi cerchi sarà $2\pi z\,dz$, ed il suo momento d'inerzia (309) sarà $2\pi z^3\,dz$. Quindi integrando s'avrà $\frac{1}{2}\pi z^4$, e compiendo l'integrale col porre $z = a$, verrà il momento d'inerzia del cerchio $= \frac{1}{2}\pi a^4$; o veramente $= \frac{1}{2} M a^2$.

312. *Coroll. V.* Vogliasi il momento dello stesso cerchiò rispetto d'un diametro.

L'area della zona elementare essendo come sopra $2\pi z\,dz$, il momento di essa rispetto del diametro risulta (310) $\pi z^3\,dz$. Quindi integrando, e poi mettendo $z = a$, sarà il cercato momento $= \frac{1}{4}\pi a^4 = \frac{1}{4} M a^2$.

Che se volessimo il momento d'inerzia dello stesso cerchio rispetto d'un asse parallelo al diametro, e distante da esso per l'intervallo k, questo sarebbe (304)

$$\frac{1}{4}\pi a^4 + \pi a^2 k^2 = \frac{1}{4} M a^2 + M k^2.$$

313. *Coroll. VI.* Si cerca il momento d'inerzia d'un parallelepipedo rettangolo, i di cui lati sono a, b, c, prendendo per asse il lato c.

Si prendano i lati a, b, c per assi delle x, y, z, e sarà l'elemento del solido $dx\,dy\,dz$, ed il quadrato di sua distanza dall'asse c sarà $x^2 + y^2$. Il momento d'inerzia sarà dunque $\int (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$.

E qui integrando successivamente per rapporto a ciascuna delle tre variabili x, y, z verrà

$$\frac{1}{3} x^3 y z + \frac{1}{3} x y^3 z;$$

poi compiendo l'integrale col porre $x = a$, $y = b$, $z = c$ verrà $\frac{1}{3} a b c (a^2 + b^2)$ o sia $\frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$.

Che se l'asse, sempre parallelo al lato c, passasse pel centro di gravità del parallelepipedo, si avrebbe $\frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$.

314. *Coroll. VII.* Si cerca il momento d' inerzia d'un solido nato dalla rotazion d' una curva, rispetto dell' asse di rotazione.

Sia $R A R'$ la curva che rotando attorno l'asse $A C$ produce il solido; sia $A C = x$, $C R = y$, e prendasi per elemento del solido la falda intercetta tra il cerchio $R R'$ corrispondente all' ascissa x, ed il prossimo corrispondente all' ascissa $x + d x$. Il momento d'inerzia di questa falda è (311) $\frac{1}{2} \pi y^4 d x$; onde quello del solido sarà $= \frac{1}{2} \pi \int y^4 d x$.

315. *Coroll. VIII.* Applicando questa formola al cilindro, al cono, alla sfera nascono i valori seguenti del momento d' inerzia

1.° Pel cilindro, essendo a il raggio della base, b la lunghezza

$$S = \frac{1}{2} \pi a^4 b = \frac{1}{2} M a^2$$

2.° Pel cono, essendo a il raggio della base, b la lunghezza

$$S = \frac{1}{10} \pi a^4 b = \frac{3}{10} M a^2$$

3.° Pel segmento sferico, essendo a il raggio, x la saetta

$$S = \pi x^3 \left(\frac{2}{3} a^2 - \frac{1}{2} a x + \frac{1}{10} x^2 \right)$$

4.° Quindi per l' emisfero

$$S = \frac{4}{15} \pi a^5 = \frac{2}{5} M a^2$$

e per l' intero globo

$$S = \frac{8}{15} \pi a^5 = \frac{2}{5} M a^2.$$

316. *Coroll. IX.* Vogliasi ora il momento del solido di rivoluzione riferito non più all'asse CA, ma bensì ad un asse perpendicolare a CA, e condotto pel vertice C.

La falda elementare intracchiusa fra le ascisse x, $x + dx$ può aversi per un cerchio di raggio y distante dall'asse per intervallo x, ed è la sua massa $M = \pi y^2 dx$. Quindi il suo momento elementare (312) sarà $= \frac{1}{4} \pi y^4 dx + \pi x^2 y^2 dx$, ed il momento totale $\frac{1}{4} \pi \int y^4 dx + \pi \int x^2 y^2 dx$.

Che se l' asse passerà non più per il vertice C, ma bensì pel centro di gravità del solido, allora chiamando X l' ascisse del centro di gravità, ed M la massa del solido, avremo il momento d'inerzia (304)

$$\frac{1}{4} \pi \int y^4 dx + \pi \int x^2 y^2 dx - M X^2.$$

317. *Coroll. X.* Applicando quest' ultima formola al cilindro, al cono ed al globo si hanno i seguenti

valori pel momento d' inerzia di questi solidi riferito ad un diametro condotto pel loro centro di gravità perpendicolarmente all' asse di rotazione; ritenendo le denominazioni dell'art. 315.

1.° Pel cilindro, $S = \frac{4}{1} M a^2 + \frac{1}{12} M b^2$

2.° Pel cono, $S = \frac{3}{20} M a^2 + \frac{3}{80} M b^2$

3.° Per l'emisfero, $S = \frac{83}{320} M a^2$

4.° Per l' ellissoide, essendo a il semiasse di rivoluzione, b il semiasse conjugato, il momento d'inerzia rispetto del primo è $S = \frac{2}{5} M b^2$; e rispetto del secondo è $S = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2)$.

CAP. XVII.

Degli Assi principali.

318. Riferito il sistema a' tre assi ortogonali (Fig. 33) OX, OY, OZ delle coordinate x, y, z chiameremo dM l' elemento della massa, e faremo per brevità

$$\int x^2 dM = A; \quad \int y^2 dM = B; \quad \int z^2 dM = C$$
$$\int xy dM = D; \quad \int xz dM = E; \quad \int yz dM = F$$

onde il momento d' inerzia del sistema rispetto dell' asse OX sarà $\int (y^2 + z^2) dM = B + C$, e così i momenti d' inerzia per gli altri due assi OY, OZ saranno $A + C$; $A + B$.

319. *Proposizione I.* Dati i momenti d'inerzia pei tre assi $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$, trovare il momento d'inerzia per un asse qualunque $O\,G$ condotto per l'origine O.

Sia $O\,F$ la projezione di $O\,G$ sul piano $X\,O\,Y$, e siano gli angoli $X\,O\,F = p$, $F\,O\,G = q$. Sia nel punto M l'elemento $d\,M$ determinato dalle coordinate $O\,P = x$, $P\,Q = y$, $Q\,M = z$. Condotta sul piano $X\,O\,Y$ la $Q\,R$ perpendicolare ad $O\,F$, mutiamo le coordinate, facendole $O\,R = x'$, $R\,Q = y'$, $Q\,M = z'$. E sarà

$$x' = O\,Q \cos.(P\,O\,Q - p) = x \cos.\,p + y \sin.\,p$$
$$y' = O\,Q \sin.(P\,O\,Q - p) = y \cos.\,p - x \sin.\,p$$
$$z' = z\,.$$

Compiasi il rettangolo $R\,Q\,M\,T$, si conduca la $T\,S$ perpendicolare ad $O\,G$, e compiuto ancora l'altro rettangolo $M\,T\,S\,K$, mutiamo di nuovo le coordinate, facendole $O\,S = x''$, $S\,K = y''$, $K\,M = z''$. E sarà

$$x'' = O\,T \cos.(R\,O\,T - q) = x' \cos.\,q + z' \sin.\,q$$
$$y'' = y'$$
$$z'' = O\,T \sin.(R\,O\,T - q) = z' \cos. - x' \sin.\,q$$

Sostituendo quivi i valori precedenti di x', y', z' e poi ricavandone il valore di $y''^2 + z''^2$, avremo il momento d'inerzia per l'asse $O\,G$; il quale se dicasi Σ, troveremo $\Sigma = \int (y''^2 + z''^2)\,d\,M =$

$$A\,(\sin.\,p^2 + \cos.\,p^2 \sin.\,q^2) + B\,(\cos.\,p^2 + \sin.\,p^2 \sin.\,q^2)$$
$$+ C \cos.\,q^2 - 2\,D \sin.\,p \cos.\,p \cos.\,q^2$$
$$- 2\,E \cos.\,p \sin.\,q \cos.\,q$$
$$- 2\,F \sin.\,p \sin.\,q \cos.\,q.$$

320. *Corollario.* Cogli stessi dati si potranno pur calcolare le somme $\int x''\,y''\,d\,M$, $\int x''\,z''\,d\,M$; e

confrontando i valori di queste somme col valor trovato di Σ, si vedrà essere

$$\int x'' y'' \, d M = - \frac{1}{2 \cos. q} \left(\frac{d \Sigma}{d p}\right);$$

$$\int x'' z'' \, d M = - \frac{1}{2} \left(\frac{d \Sigma}{d q}\right).$$

321. *Proposizione II.* Fra tutti gli assi condotti per l'origine O, trovare quell' asse $O G$ cui competa il momento d' inerzia massimo o il minimo.

Sciogliesi questo Problema colle due equazioni

$$\left(\frac{d \Sigma}{d p}\right) = 0 \; ; \quad \left(\frac{d \Sigma}{d q}\right) = 0 \, .$$

Differenziando adunque il valore di Σ (319) separatamente rispetto alle due variabili p, q, ed eguagliando a zero entrambi i differenziali, avremo due equazioni per determinare i due angoli p, q che fissano la posizione dell' asse ricercato.

Eliminando q, rimane per determinare l' angolo p un' equazion cubica assai complicata, che avrà questa forma (*)

$$A' \text{ tang. } p^3 \; B' \text{ tang. } p^2 + C' \text{ tang. } p + D' = 0.$$

322. *Coroll. I.* Quest' equazione, siccome cubica, avrà certo una radice reale. Dovrà anzi averne due; poichè essendo il momento d' inerzia per ogni asse quantità positiva, se v' ha un asse che dia il momento massimo, dovrà per necessità esserne un altro che dia il minimo; e viceversa. Che se due radici sono reali, non potrà non esserlo anche la terza. La nostra equazione avrà dunque tutte tre le radici reali; e però indicherà, generalmente parlando, tre assi.

(*) *V.* Euler, *Theoria motus corporum solidorum*, art. 438.

323. *Coroll. II.* Ma non a tutti tre questi assi potrà convenire la qualità del massimo, o minimo momento; che anzi se uno dà assolutamente il momento massimo, e l' altro minimo, il terzo non potrà dare nè l' un nè l' altro. E già è noto che dall' essere il differenziale d' una funzione eguale a zero, non sempre si conchiude il massimo o il minimo.

Bensì converrà a tutti tre gli assi la proprietà, che il differenziale del loro momento d' inerzia è uguale a zero; vale a dire che un minimo cangiamento nella situazione dell' asse per qualunque verso, non cangia punto il valore del momento d' inerzia.

324. *Coroll. III.* Portano questi assi il nome di *Assi principali* del sistema. Asse principale è dunque quello per cui il differenziale del momento d' inerzia è nullo. E si vede che per ciascun punto del sistema ponno condursi tre assi dotati di questa proprietà.

325. *Coroll. IV.* L' equazioni $\left(\frac{d\Sigma}{dp}\right)=0$, $\left(\frac{d\Sigma}{dq}\right)=0$ per le quali si determinano gli assi principali, traggon seco quest' altre due (320) $\int x'' y'' \, dM = 0$, $\int x'' z'' \, dM = 0$. Dunque ogni asse principale ha questa proprietà, che se in esso si prendono le ascisse x, sarà $\int x y \, dM = 0$, $\int x z \, dM = 0$. E viceversa.

326. *Coroll. V.* Se il sistema è simmetrico attorno l' asse OG, sarà OG un asse principale.

Poichè prese le x sull' asse OG, per ogni elemento dM determinato dalle coordinate x, y ve

Ora è $\cos. p \cos. q = \cos. G\,O\,X = \cos. f$

$\sin. p \cos. q = \cos. G\,O\,Y = \cos. g$

$\sin. q = \cos. G\,O\,Z = \cos. h.$

Dunque ec.

332. *Coroll. I.* Poichè i tre assi principali sono ortogonali sarà

$\cos. f^2 + \cos. g^2 + \cos. h^2 = 1$. Onde dei tre angoli f, g, h bastano due per fissare la posizione dell' asse $O\,G$.

333. *Coroll. II.* Quindi il valore di Σ può esprimersi anche in questa guisa

$\Sigma = A' - (A' - B') \cos. g^2 - (A' - C') \cos. h^2$;

ovvero

$\Sigma = C' + (A' - C') \cos. f^2 + (A' - B') \cos. g^2$

Sia $A' > B' > C'$: apparisce tosto che sarà $A' > \Sigma > C'$. Onde si conferma che il momento d' inerzia d' ogni asse è compreso fra il massimo A' ed il minimo C' competenti a due assi principali.

334. *Coroll. III.* Può avvenire che fra i momenti degli assi principali ve ne siano due eguali fra loro. Siano questi i momenti degli assi $O\,X$, $O\,Y$, onde sia $A' = B'$. Allora diventa

$$\Sigma = A' (1 - \cos. h^2) + C' \cos. h^2$$

il qual valore viene $= A'$ quando $h = 90.°$ Dunque tutti gli assi condotti nel piano $X\,O\,Y$ avranno eguali momenti d' inerzia.

335. *Coroll. IV.* Può anche avvenire che i momenti degli assi principali siano tutti tre eguali fra loro; onde $A' = B' = C'$. Allora diventa $\Sigma = A'$, e tutti gli assi hanno lo stesso momento d' inerzia.

336. *Coroll. V.* Di qui si vede che gli assi principali che ponno condursi per un punto qualunque

del sistema, sono sempre o in numero di tre, o in numero infinito.

337. *Scolio.* Per le cose sin qui dette agevolmente si ravvisano gli assi principali delle figure più semplici. Nel parallelepipedo rettangolo gli assi principali condotti pel centro di gravità sono tre rette parallele ai lati. Nella sfera ogni diametro può aversi per un asse principale. Nel cerchio, così per la periferia, come per l'area, uno degli assi principali è una retta elevata sul centro normale al piano del cerchio; gli altri due sono due diametri qualunque, che si taglino ad angolo retto, poichè ogni diametro essendo similmente posto rispetto al cerchio, ha egual momento d'inerzia. Similmente nei solidi di rivoluzione, l'asse medesimo di rivoluzione è uno de' principali, e gli altri due sono due rette qualunque perpendicolari all'asse, che si taglino ad angolo retto.

CAP. XVIII.

Del modo d'un sistema rigido attorno un asse immobile.

338. Mentre un corpo o un sistema rigido si rivolge attorno un asse immobile, ciaschedun punto descrive la periferia d'un circolo che ha il suo centro nell'asse, ed ha per raggio la distanza di quel punto dell'asse medesimo. Quindi le velocità contemporanee di diversi punti sono proporzionali alle loro distanze dall'asse. La velocità di quei punti, la distanza de' quali dall'asse è $= 1$, dicesi *Velocità angolare* della rotazione.

Conosciuta la velocità angolare, si conosce la velocità di ciaschedun punto del sistema. Sia la velocità angolare $= \omega$; la velocità d'un punto o elemento distante dall' asse di rotazione per l' intervallo r sarà $= r\omega$.

339. *Proposizione I.* Se un corpo mobile attorno un asse venga sospinto da una forza agente in un piano perpendicolare a quell'asse, esso corpo incomincerà a rotare con velocità angolare eguale al momento della forza diviso pel momento d'inerzia del corpo; riferiti ambo i momenti all' asse immobile.

Sia F la forza; a la distanza della sua direzione dall'asse; S il momento d'inerzia del corpo rispetto a quell'asse: sarà la velocità angolare $\omega = \frac{aF}{S}$.

Dim. Consideriamo un elemento dM posto alla distanza r dall' asse di rotazione. Avendo quest' elemento in virtù della forza F concepita la velocità $r\omega$, e quindi la forza $r\omega\, dM$, se esso girasse in senso contrario, e lo stesso pure facessero tutti gli altri, il complesso di queste forze elementari dovrebbe (300) far equilibrio colla forza F. Quindi la somma de' loro momenti di rotazione dovrebbe (108) esser uguale al momento aF della forza F. Ma il momento della forza elementare $r\omega\, dM$ è $= r^2 \omega\, dM$, e la somma di questi momenti è $= \omega \int r^2 dM = \omega S$. Dunque dev' essere $\omega S = aF$, onde ec.

340. *Coroll. I.* Se la forza F dopo il primo impulso resta d' agire, seguiterà il corpo tuttavia a rivolgersi intorno all' asse uniformemente e perpetuamente colla velocità angolare testè determinata.

Ciò risulta dall' art. 254.

341. *Coroll. II.* Ma se l' azione della forza F è continua, il moto rotatorio sarà accelerato, ed avrassi

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{aF}{S}.$$

Dim. Sia $d\omega$ l' aumento che riceve la velocità angolare nell' istante dt. L' aumento della velocità che riceve l' elemento dM sarà $rd\omega$, onde sarà la sua forza acceleratrice (203) $\frac{rd\omega}{dt}$, e la sua forza motrice $\frac{rd\omega dM}{dt}$. Rivolte tutte queste forze in senso contrario debbono (300) equilibrarsi colla forza F, onde la somma de' loro momenti di rotazione dovrà essere $= aF$. Quindi $\frac{d\omega}{dt}\int r^2 dM = \frac{Sd\omega}{dt} = aF$.

342. *Scolio.* Cerchiamo ora gli sforzi che sostiene l' asse sopra cui il corpo s' aggira. E prima considereremo gli sforzi che sostiene nel primo spostarsi del corpo per cagione dell' impulso comunicatogli dalla forza F, appresso quelli che sostiene nella continuazione del moto per cagione del moto stesso, ed indipendentemente dalla forza che lo ha prodotto.

343. *Proposizione II.* Determinare gli sforzi che l' asse sostiene per l' impulso della forza F.

Sia l' asse di rotazione OZ fisso ne' due perni M, N (Fig. 15). Riferiamo il sistema a tre assi ortogonali; prendiamo OZ per asse delle z, e giacendo la forza F nel piano delle x, y sia l' asse delle x perpendicolare alla direzione di essa forza F. Siano $OM = \zeta$, $ON = \zeta'$ le ordinate che determinano la situazione dei due perni. Si consideri un elemento qualunque dM cui rispondano le coordi-

nate x, y, z; la sua distanza dall' asse $O Z$ sar $\sqrt{(x^2+y^2)}$; quindi la velocità $= \omega \sqrt{(x^2+y^2)}$ e la forza $= \omega\, d M \sqrt{(x^2+y^2)}$. Questa forza diretta secondo la tangente del circolo che que punto rotando descrive, prolungata da quella parte verso la quale si fa la rotazione. Quindi risolvendola in due, l' una parallela alle x, l' altra alle y si troverà la prima $= -\omega\, y\, d M$, la seconda $= \omega\, x\, d M$. Adunque la somma o risultante delle prime sarà $= -\omega \int y\, d M$, e delle altre $= \omega \int x\, d M$. Rivolte queste forze in contrario debbono (300) equilibrarsi colla forza F la quale per ipotesi agisce secondo le y. Pertanto nel nostro sistema havvi equilibrio tra la forza $\omega \int y\, d M$ diretta secondo le x, e la forza $F - \omega \int x\, d M$ diretta secondo le y.

Ciò posto, chiamando p, q le pressioni che sostiene il fulcro M nel senso delle x ed y; e similmente p', q' le pressioni che sostiene il fulcro N, sarà (129)

$$p + p' = \omega \int y\, d M; \quad q + q' = F - \omega \int x\, d M$$
$$p\zeta + p'\zeta' = \omega \int y z\, d M; \quad q\zeta + q'\zeta' = -\omega \int x z\, d M$$

onde potranno determinarsi gli sforzi richiesti.

344. *Scolio I.* Se la forza giacesse in un piano obbliquo all' asse $O Z$, fa d' uopo risolverla in due, l' una parallela ad $O Z$, e l' altra F situata in un piano perpendicolare ad $O Z$. La prima di queste forze produrrà ulteriori sforzi contro i perni M, N, i quali dovranno determinarsi come all' art. 131 ed aggiungersi a quelli provenienti dalla F.

345. *Scolio II.* Gli sforzi che l' impulso della forza produce nel primo spostarsi del corpo vengono tostamente elisi dalla resistenza de' perni M, N.

Non così avviene delle pressioni che nascono dalla rotazione del corpo; queste durano quanto dura la rotazione medesima. Noi ne determineremo il valore colla seguente

346. *Proposizione III.* Determinare gli sforzi che sostiene l'asse durante la rotazione del corpo.

Descrivendo ciascun elemento dM la periferia d'un circolo che ha per raggio $\sqrt{(x^2+y^2)}$, la sua forza centrifuga sarà espressa (260) per $\omega^2 dM \sqrt{(x^2+y^2)}$. Questa si esercita secondo il prolungamento del raggio stesso. Risolvendola in due forze parallele ad x, y, queste risultano $\omega^2 x\, dM$, $\omega^2 y\, dM$. Il complesso di queste forze viene sostenuto ed equilibrato dalla resistenza de' perni. Quindi chiamando p, q le pressioni sostenute dal perno M secondo x, y; e p', q' quelle del perno N, sarà (129)

$$p+p'=\omega^2\int x\, dM;\quad q+q'=\omega^2\int y\, dM$$
$$p\zeta+p'\zeta'=\omega^2\int xz\, dM;\quad q\zeta+q'\zeta'=\omega^2\int yz\, dM$$

onde potranno determinarsi le richieste pressioni.

347. *Coroll. I.* Se l'asse OZ è uno dei tre assi principali che passano pel centro di gravità del corpo, i perni non sosterranno pressione veruna.

Imperocchè per essere OZ un asse principale avremo (325) $\int xz\, dM=\int yz\, dM=0$; e perchè il centro di gravità trovasi sull'asse OZ avremo ancora (56) $\int x\, dM=\int y\, dM=0$; onde ec.

348. *Coroll. II.* Se OZ è bensì un asse principale, ma non passa pel centro di gravità, allora basta un solo perno per sostenere l'asse di rotazione.

In fatti si collochi l'origine delle ascisse nel perno M. Avremo $\zeta=0$, $\int xz\, dM=\int yz\, dM=0$.

Fatte queste sostituzioni trovasi $p' = 0$, $q' = 0$, onde il perno N non sosterrà pressione alcuna; l'altro perno M sosterrà le pressioni $p - \omega^2 \int x\, d\, M$; $q = \omega^2 \int y\, d\, M$.

CAP. XIX.

Del Centro di percossa.

349. *Proposizione I.* Rotando un corpo attorno qualcuno de' suoi assi principali, determinare la risultante delle forze elementari.

Sia MRD (Fig. 34) la sezione del corpo rotante attorno l'asse CV, fatta mediante un piano normale a quest' asse e condotto pel centro di gravità G. Sia M la massa del corpo, S il momento d'inerzia rispetto dell' asse CV, ω la velocità angolare, e finalmente l'intervallo $CG = k$. Prendasi CV per asse delle z, il piano MRD sia il piano delle x, y e la CG sia l'asse delle x.

Risolvendo la forza dell' elemento dM secondo le x, y la risultante delle forze parallele alle x sarà $= - \omega \int y\, d\, M$, e la risultante delle forze parallele alle y sarà $= \omega \int x\, d\, M$ (343). Queste risultanti cadono entrambe nel piano MRD; poichè i loro momenti (55) rispetto di questo piano debbon essere uguali alle somme de' momenti delle forze, cioè a $- \omega \int y\, z\, d\, M$, $\omega \int x\, z\, d\, M$ ed essendo CV un asse principale abbiamo (325) $\int y\, z\, d\, M = \int x\, z\, d\, M = 0$. Di più chiamando X, Y le coordinate del centro di gravità, abbiamo (50) $\int x\, d\, M = M\, X$, $\int y\, d\, M = M\, Y$. Ma qui

per costruzione è $X = k$, $Y = 0$. Dunque la risultante parallela alle x è nulla; l'altra è $= M k \omega$, ed è perpendicolare a CG.

Determineremo il punto Q nel quale la direzione di questa forza taglia la CG, avvertendo di nuovo, che il momento di ciascheduna delle due risultanti parallele alle x ed alle y rispetto ai piani delle coordinate dev' essere uguale alla somma dei momenti delle componenti. E quindi per le forze parallele alle x abbiamo $0 = \omega \int y^2 \, d M$, e per quelle parallele alle y abbiamo $M k \omega \, . \, C Q = \omega \int x^2 \, d M$. Sommando queste due equazioni viene

$$M k \omega \, . \, C Q = \omega \int (x^2 + y^2) \, d M = \omega S.$$

Onde $C Q = \frac{S}{Mk}$. Con ciò resta pienamente determinato nella quantità e nella posizione la cercata risultante delle forze elementari.

350. *Proposizione II.* Nel corpo rotante attorno un asse principale havvi un punto per cui passa la risultante di tutte le forze elementari, qualunque siasi la posizione del corpo rotante, e qualunque siasi la velocità della rotazione. Questo punto dicesi *Centro di percossa.*

Dim. Nel piano $M R D$ normale all'asse $C V$ e condotto pel centro di gravità G del corpo, si conduca la $C G$, e si prolunghi in Q tanto che sia $C Q = \frac{S}{M k}$. Sarà Q il centro di percossa. Per esso infatti passerà (349) la risultante delle forze elementari; e siccome la formola $\frac{S}{Mk}$ che ne determina il sito, non contiene nè ω, nè F, nè a, nè verun

elemento dipendente dalle situazioni che il corpo prende girando, vedesi che la sopraddetta risultante passerà costantemente pel punto Q.

351. *Coroll. I.* Il centro di percossa è sempre più lontano dall' asse che non è il centro di gravità.

Poichè il momento d' inerzia rispetto d' un asse che non passa pel centro di gravità è sempre maggiore di Mk^2 (304); quindi $\frac{S}{Mk} > k$; o sia $CQ > CG$.

352. *Coroll. II.* Se il corpo è spinto a rotare da una forza F agente nel piano MRD, perpendicolare alla CG, e che passi pel centro Q di percossa, l' impulso di questa forza non produrrà veruno sforzo contro i perni che sostengono l' asse di rotazione.

Ciò risulta dalle formole dell'art. 343. Poichè essendo nel caso nostro $\int yz\,dM = \int xz\,dM = \int y\,dM = 0$; e $\int x\,dM = Mk$, avremo $p + p' = 0$, $p\zeta + p'\zeta' = 0$, $q\zeta + q'\zeta' = 0$; e $q + q' = F - Mk\omega$. Ma (339) $\omega = \frac{aF}{S}$, e qui abbiamo per ipotesi $a = CQ = \frac{S}{Mk}$, onde $\omega = \frac{F}{Mk}$, ossia $F - Mk\omega = 0$. Dunque anche $q + q' = 0$, onde ec.

CAP. XX.

Pel Centro d' oscillazione.

353. PENDOLO *composto* è un corpo o un sistema di forma invariabile che abbandonato alla sola sua gravità oscilla attorno d' un asse orizzontale.

Differisce dal pendolo semplice, nel quale o non si considera massa alcuna, o questa tutta in un solo punto supponesi concentrata.

354. *Proposizione.* Nel pendolo composto havvi un punto in cui se tutta la massa del corpo oscillante si supponesse concentrata, riducendo così il pendolo composto ad un pendolo semplice, le oscillazioni di questo sarebbono isocrone a quelle del pendolo composto. Questo punto dicesi *Centro d' oscillazione.*

Sia MRD la sezione del pendolo oscillante per la gravità g attorno l'asse orizzontale CV, la qual sezione sia fatta mediante un piano perpendicolare a CV, condotto pel centro di gravità G. Declini la retta CG dalla verticale CT coll'angolo $GCT = \varphi$. Ritenute le denominazioni precedenti, egli è chiaro che siccome tutto il peso del sistema può considerarsi raccolto nel suo centro di gravità G, sarà la forza che fa rotare il sistema $= Mg$, ed il suo momento rispetto dell'asse CV sarà $Mgk \sin.\ \varphi$; onde (341) il moto oscillatorio del pendolo composto sarà determinato dall'equazione $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mgk \sin.\ \varphi.}{S}$

Ora si prolunghi la GC in Q, tanto che sia $CQ = \frac{S}{Mk}$, e nel punto Q suppongasi concentrata tutta la massa M. Allora diverrà $k = CQ$, ed $S = M \,.\, CQ^2$; ed il moto oscillatorio sarà regolato dall'equazione $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mg \sin.\ \varphi \,.\, CQ}{M \,.\, CQ^2}$, o sia $\frac{d\omega}{dt} = \frac{g \sin.\ \varphi}{CQ}$; o sia, poichè $CQ = \frac{S}{Mk}$, dall'e-

quazione $\frac{d\omega}{dt} = \frac{M g k \sin. \varphi}{S}$. Ma questa equazione è identica alla precedente. Adunque il moto oscillatorio del pendolo semplice CQ è lo stesso che quello del pendolo composto.

355. *Coroll. I.* Trovasi dunque il centro d'oscillazione in un modo tutto analogo a quello col quale si trova, quando ha luogo, il centro di percossa. Tagliasi il corpo mediante un piano normale all'asse, e condotto pel centro di gravità, e sulla retta CG prolungata si piglia $CQ = \frac{S}{Mk}$. Sarà CQ la lunghezza del pendolo semplice isocrono al pendolo composto.

356. *Coroll. II.* Di qui si ha un modo facile di trovare meccanicamente il momento d'inerzia d'un corpo comunque irregolare. Facciasi oscillar questo corpo per archi minimi attorno d'un asse orizzontale, e contando le oscillazioni fatte in un determinato tempo, si troverà facilmente il tempo d'ogni mezza oscillazione, e quindi per la formola dell'art. 284 si conoscerà la lunghezza CQ d'un pendolo semplice isocrono. Poscia l'equazione $S = Mk.CQ$ manifesterà subito il valore di S riferito all'asse di rotazione.

357. *Coroll. III.* Cercasi ancora il centro d'oscillazione delle linee e figure geometriche, supponendole gravi ed omogenee. Chiameremo sempre k la distanza del centro di gravità dall'asse di rotazione, ed L la distanza del centro d'oscillazione dallo stesso asse. Ed avremo

1.° Per una retta di lunghezza a che oscilli sospesa dall'estremo superiore

$$L = \frac{2}{3} a = k + \frac{1}{6} a.$$

2.° Per un parallelepipedo rettangolo di lati a, b, c sospeso da un asse che biseca la base superiore $b\,c$, essendo parallelo al lato c

$$L = \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2 + 4\,a^2}{a} = k + \frac{1}{6} \frac{a^2 + b^2}{a}$$

Il qual valore, se il lato b è strettissimo, coincide con quello che appartiene alla linea retta.

3.° Per una sfera di raggio a

$$L = k + \frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{k}.$$

4.° Per un segmento sferico, essendo a il raggio, x la saetta

$$L = k + \frac{x}{k} \cdot \frac{\frac{2}{3} a^2 - \frac{1}{2} a\,x + \frac{1}{10} x^2}{a - \frac{1}{3} x}$$

Per una lente composta di due segmenti sferici uguali, il valore di L è lo stesso.

338. *Coroll. IV.* Ecco una regola utile per trovare il centro d' oscillazione d' un sistema, quando si conoscano i centri di gravità, e i centri d' oscillazione delle singole parti. Siano M', M'', M''' ec. le masse che formano il sistema; k', k'', k''' ec. le distanze de' loro centri di gravità dall' asse comune di rotazione; l', l'', l''' ec. le distanze de' loro centri d'oscillazione da quell' asse: sarà

$$L = \frac{M'\,k'\,l' + M''\,k''\,l'' + M'''\,k'''\,l''' \text{ ec.}}{M'\,k' + M''\,k'' + M'''\,k''' \text{ ec.}}$$

In fatti essendo $L = \frac{S}{Mk}$ si vede che il momento d' inerzia della prima massa sarà $M' k' l'$, e quello della seconda $M'' k'' l''$ ec. ed il momento d' inerzia di tutto il sistema non altro essendo che la somma de' momenti d' inerzia delle sue parti, sarà $M' k' l' + M'' k'' l'' + M''' k''' l'''$ ec. Altronde per la proprietà del centro di gravità (55) è $M k = M' k' + M'' k'' + M''' k'''$ ec. Dunque ec.

359. *Coroll. V.* Il centro d' oscillazione non è un punto unico nel sistema. Se per Q si conduce la retta orizzontale $Q V'$ parallela all'asse $C V$, è manifesto che ciaschedun punto di questa retta $Q V'$ oscilla precisamente come il punto Q. Dunque tutti i punti della $Q V'$ sono centri d' oscillazione, e quindi dicesi la $Q V'$ *Asse de' centri d'oscillazione.*

360. *Coroll. VI.* L' asse de' centri d' oscillazione, e l' asse di sospensione si corrispondono reciprocamense l'un l'altro, così che se $Q V'$ divenisse l'asse di sospensione, $C V$ diverrebbe l' asse de' centri d' oscillazione.

In fatti se $Q V'$ diventa l' asse di sospensione, diventerà $k = Q G$; ed il momento d' inerzia riferito al nuovo asse $Q V'$ si troverà per l' art. 305

$$= S - M (C G^2 - Q G^2)$$
$$= S - M (C G + Q G) (C G - Q G)$$
$$= S - M . C Q . C G + M . C Q . Q G.$$

Ma avevamo $S = M . C Q . C G$; dunque il momento d' inerzia si riduce ad $M . C Q . Q G$; onde

$$L = \frac{M . CQ . QG}{M . QG} = C Q$$

il che ec.

CAP. XXI.

Movimento iniziale d' un sistema rigido e libero, sollecitato da una data forza.

361. Intenderemo quel che debba avvenire ad un corpo, o qualunque altro sistema rigido sollecitato da più forze, se prima avremo conosciuto ciò che gli avvenga ove sia investito da una forza sola. E qui convien distinguere due casi, potendo la direzione della forza passare pel centro di gravità del sistema o non passarvi.

362. *Proposizione I.* Se la direzione della forza passa pel centro di gravità, il corpo ne concepirà un moto progressivo con direzione parallela a quella della forza.

Poichè passando la forza motrice pel centro di gravità, essa potrà risolversi in più forze eguali e parallele, applicate a ciascheduno degli elementi eguali del sistema. Che perciò si moverà non altrimenti che se ognuno de' suoi elementi fosse animato da forze eguali e parallele: avrà dunque moto progressivo.

363. *Proposizione II.* Nel caso della Proposizione precedente la velocità del corpo sarà eguale alla forza sollecitante divisa per la massa del corpo stesso.

Sia M la massa, F la forza impellente. Risoluta la forza F in tante forze elementari eguali e parallele, quanti sono gli elementi eguali della massa, egli è chiaro che siccome la somma di tutte queste

forze elementari dev' essere $= F$, ed il loro numero $= M$, così ciascheduna di esse sarà $= \frac{F}{M}$. Quindi (10) sarà la velocità $u = \frac{F}{M}$.

364. *Proposizione III.* Se la direzione della forza non passa pel centro di gravità, il corpo concepirà simultaneamente due moti: l' uno progressivo come se la forza passasse pel centro di gravità; l' altro rotatorio attorno del centro di gravità come se questo centro fosse immobile.

Sia MRD (Fig. 35) la sezione del corpo mediante un piano che passi pel suo centro di gravità G, e per la direzione della forza impellente; la qual forza sia AP. A questo piano intendasi eretto in G l' asse perpendicolare GX.

Condotta la GA normale ad AP, e presa $GB = GA$; s' intendano applicate nel punto B le due forze opposte BQ, BS ciascuna eguale alla metà della AP. E la forza AP s' intenda divisa nelle due eguali AK, KP.

Così alla forza AP ponno sostituirsi le quattro forze uguali AK, BQ, KP, BS. Ora la risultante delle due prime AK, BQ passa per G, è parallela ad AP, ed è eguale ad $AK + BQ$ o sia alla AP medesima. Adunque per le due forze AK, BQ il corpo si moverà non altrimenti che se la forza AP passasse pel centro G.

Le altre due forze KP, BS tendono palesemente ad aggirare il corpo attorno l' asse GX nel senso della forza AP, e col momento $KP \cdot GA + BS \cdot GB$. E qui essendo $GB = GA$,

e $KP + BS = AP$, questo momento diviene $AP . AG$, che è appunto il momento della forza AP per aggirare il corpo attorno GX. Adunque per le due forze KP, BS il corpo roterà attorno l'asse GX come farebbe per la sola forza AP se quell' asse fosse immobile.

365. *Proposizione IV.* Nel caso della Proposizion precedente, la velocità del moto progressivo è uguale alla forza impellente divisa per la massa del corpo; la velocità angolare di rotazione è uguale al momento della forza diviso pel momento d' inerzia del corpo: riferiti entrambi i momenti all' asse di rotazione GX.

Sia la forza movente $= F$; la massa del corpo $= M$; il suo momento d' inerzia $= S$; la distanza $AG = a$; la velocità del moto progressivo $= u$; la velocità angolare $= \omega$. Dico che sarà $u = \frac{F}{M}$; $\omega = \frac{aF}{S}$.

Dim. Il moto progressivo è lo stesso (364) che se la forza F passasse pel centro di gravità. Dunque (363) $u = \frac{F}{M}$.

Il moto rotatorio pure è lo stesso (364) che se la forza F rotasse il corpo attorno l' asse GX. Dunque (339) $\omega = \frac{aF}{S}$.

366. *Coroll. I.* La velocità del moto progressivo sta alla velocità angolare di rotazione come $\frac{F}{M}$ ad $\frac{aF}{S}$ o sia come S ad aM. Quindi agevol-

mente si scioglie il seguente Problema. Cercasi in qual punto debba spingersi un corpo dato, affinchè prendendo esso contemporaneamente i due moti progressivo e rotatorio, stia la velocità del primo a quella del secondo in ragion data di $m : n$.

Dovrà essere $m : n :: S : a M$; onde $a = \frac{n S}{m M}$.
Converrà dunque che la direzione della forza impellente sia distante dal centro di gravità dell' intervallo $\frac{n S}{m M}$.

367. *Coroll. II.* Sulla retta $A G$ prolungata al di là di G havvi un tal punto G che per un dato istante sta fermo; poichè quanto s' avanzerebbe pel moto progressivo, altrettanto retrocede pel moto rotatorio. Questo punto chiamasi *Centro di spontanea rotazione.*

Difatti la velocità di ciascun punto del corpo è la risultante delle due velocità progressiva e rotatoria che gli competono. Ora pei punti situati sulla retta $A G B$ le due velocità sono cospiranti od opposte. Sia sulla $A B$ un punto posto a distanza r dall' asse; sarà la sua velocità $u \pm r \omega$; valendo il segno $+$ pei punti che cadono da G verso A, ed il segno $-$ pei punti che cadono da G verso B. Per questi ultimi adunque essendo la velocità $u - r \omega$, essa diverrà nulla in quel punto ove $r = \frac{u}{\omega}$ o sia $= \frac{S}{a M}$. Quindi presa $G C = \frac{S}{a M}$, sarà C il centro di spontanea rotazione.

368. *Coroll. III.* Di qui si deduce che il doppio moto onde il corpo è animato può per un istante

riguardarsi come un semplice moto rotatorio attorno un asse parallelo all' asse GX, e distante da esso della quantità $\frac{u}{\omega}$.

E viceversa se il corpo non avesse che un semplice moto rotatorio attorno un asse qualunque, del quale la distanza dal centro di gravità esprimasi per $\frac{u}{\omega}$, questo moto potrà per un istante riguardarsi come composto di due moti simultanti, l' uno progressivo con velocità u, l' altro rotatorio attorno G con velocità angolare ω.

369. *Scolio.* Se più forze investono il corpo, il suo moto istantaneo si comporrà di tutti i moti progressivi e rotatorj dovuti a ciascuna delle forze sollecitanti. La composizione de' moti progressivi ci è già nota abbastanza; restaci a spiegare la composizione de' moti rotatorj, senza della quale non bene potrebbe intendersi qual fosse il moto iniziale d' un corpo attuato nello stesso tempo da più forze diverse, e molto meno potrebbe determinarsi il proseguimenso del moto.

CAP. XXII.

Della composizione de' moti rotatorj.

370. *Proposizione I.* Pongasi che il sistema giri nello stesso tempo attorno i tre assi ortogonali delle coordinate OX, OY, OZ (Fig. 36) colle velocità angolari p, q, r rispettivamente; così che nel-

l' istante dt descriva attorno questi assi gli angoli minimi $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$. Si vuol esprimere il cangiamento di luogo d'un punto M del sistema nell'istante dt.

Si consideri dapprima la rotazione $r\,dt$ attorno l'asse OZ da X verso Y. Sia OQ la projezione della OM sul piano XOY. Il punto Q scorrerà nell'istante dt l' archetto $Qq = OQ \,.\, r\,dt$; ed il punto M scorrerà un archetto eguale e parallelo a questa Qq. Le coordinate del punto M sono $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, ed i triangoli simili OPQ, qQr danno

$$OQ : Qq :: OP : qr :: PQ : Qr; \text{ o sia}$$
$$1 : r\,dt :: x : dy :: y : -dx$$

Onde avremo per questa rotazione

$$dx = -ry\,dt;\quad dy = rx\,dt;\quad dz = 0.$$

Appresso si consideri la rotazione $p\,dt$ attorno l'asse OX da Y verso Z. Sia OC la projezione della OM sul piano YOZ. Il punto C scorrerà l'archetto $Cc = OC \,.\, p\,dt$; ed il punto M scorrerà un archetto eguale e parallelo a Cc. Ed essendo le coordinate di M, $OB = y$, $BC = z$, $CM = x$, i triangoli simili OBC, cCs daranno

$$OC : Cc :: OB : cs :: BC : Cs; \text{ o sia}$$
$$1 : p\,dt :: y : dz :: z : -dy.$$

Onde per questa rotazione sarà

$$dx = 0;\ dy = -pz\,dt;\ dz = py\,dt$$

Per ultimo si consideri la rotazione $q\,dt$ fatta attorno l' asse OY da Z verso X. Sia ON la projezione della OM sul piano ZOX. Il punto N descriverà l'archetto $Nn = ON \,.\, q\,dt$; ed il punto M scorrerà un archetto eguale e parallelo ad Nn. Es-

endo le coordinate di M, $OL = z$, $LN = x$, $NM = y$, avremo pei triangoli simili OLN, nNt

$$ON : Nn :: OL : nt :: LN : Nt; \text{ o sia}$$

$$1 : q\,dt :: z : dx :: x : -dz$$

sarà per questa rotazione

$$dx = q\,z\,dt;\ dy = 0;\ dz = -q\,x\,dt.$$

E facendosi tutte tre le rotazioni insieme, sarà

$$(C)\quad \begin{aligned} dx &= dt\,(qz - ry) \\ dy &= dt\,(rx - pz) \\ dz &= dt\,(py - qx) \end{aligned}$$

371. *Coroll. I.* Si conduca per O la retta OG determinata da questa proporzione

$$x : y : z :: p : q : r$$

sarà per ciascun punto di questa retta $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$. Adunque per l'istante dt la retta OG resterà immota, e tutto il sistema non farà che rivolgersi intorno ad essa. Per questa proprietà dicesi la OG *Asse istantaneo della rotazione.*

372. *Coroll. II.* Facilmente si determina la posizione di questo Asse istantaneo. Siano f, g, h gli angoli che esso fa cogli assi OX, OY, OZ; e facciasi per brevità $\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)} = V$. Sarà

$$\cos. f = \frac{p}{V};\ \cos. g = \frac{q}{V};\ \cos. h = \frac{r}{V}.$$

373. *Coroll. III.* E la velocità angolare di questa rotazione istantanea attorno OG, sarà $= V$.

In fatti condotta la perpendicolare PK sopra OG, sarà $PK = OP\,\text{sin.} f = (372)\ \frac{x}{V}\sqrt{(q^2 + r^2)}$.

Ora pel punto P abbiamo $y = 0$, $z = 0$, e per conseguenza (370) $dx = 0$, $dy = r\,x\,dt$, $dz = -q\,x\,dt$. Dunque la velocità del punto P sarà

$$= \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt} = x\sqrt{(q^2 + r^2)}.$$

E la velocità angolare attorno OG sarà

$$= \frac{x\sqrt{(q^2 + r^2)}}{PK} = V.$$

374. *Coroll. IV.* Tre rotazioni $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ che insieme si facciano attorno tre assi ortogonali, equivalgono ad una rotazione unica $dt\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$ attorno un asse che farà coi tre primi gli angoli de' coseni

$$\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}},\ \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}},\ \frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$$

E viceversa una rotazione $V\,dt$ attorno un dato asse, equivale a tre rotazioni simultanee $V\,dt\cos.f$, $V\,dt\cos.g$, $V\,dt\cos.h$ attorno tre assi ortogonali, che faccian con quello gli angoli de' coseni f, g, h.

375. *Proposizione II.* Pongasi che gli assi OX, OY, OZ siano fissi nel sistema, di modo che facendosi le tre rotazioni come nella Proposizione antecedente, ciascheduno degli assi come OX giri insieme col sistema attorno gli altri due. Si vuol esprimere il cangiamento di luogo dei tre assi nell' istante dt.

Comodamente si rappresentano questi cangiamenti di sito per mezzo della Trigonometria sferica. Intendasi col centro O, e col raggio $= 1$ descritta nello spazio una sfera (Fig. 37) e siano X, Y, Z i punti della sua superficie per dove passano gli assi OX, OY, OZ. Essendo questi assi ortogonali, gli archi XY, YX, ZX saranno quadranti di cerchio massimo, e si taglieranno ad angoli retti. Preso ad arbitrio fra i circoli massimi della sfera un circolo

fisso ATB, e fissato in esso parimente ad arbitrio un punto T, siano gli archi $TX = l$, $TY = m$, $TZ = N$, e gli angoli $BTX = \lambda$, $BTY = \mu$, $BTZ = \nu$. Ora facendosi congiuntamente le tre rotazioni pdt, qdt, rdt attorno gli assi OX, OY, OZ, si vuol sapere quale spaziatto descriveranno nell' istante dt i punti X, Y, Z, e come varieranno gli angoli l, m, n, λ, μ, ν.

Si cerchi da prima il movimento del punto X. Per la rotazione pdt che si fa sullo stesso polo X, esso non si muoverà punto, onde sarà per questa rotazione $dl = 0$ $\qquad d\lambda = 0$

Per la rotazione qdt che si fa sul polo Y, il punto X descriverà un archetto $XQ = qdt$, normale ad YX. E conducendo QR perpendicolare a TX, sarà

$$XR = XQ \cos. TXQ$$

$$= - XQ \cos. TXZ = - qdt \frac{\cos. n}{\sin. l}$$

$$QR = XQ \sin. TXQ$$

$$= XQ \cos. TXY = qdt \frac{\cos. m}{\sin. l}$$

Ma $XR = - dl$, e l' archetto QR è la misura dell' angolo QTX in un cerchio che abbia per raggio sin. TX, onde $QR = - d\lambda \sin. l$. Dunque sarà per questa seconda rotazione

$$dl = qdt \frac{\cos. n}{\sin. l}\,;\; d\lambda = - qdt \frac{\cos. m}{\sin. l^2}$$

In egual modo per la rotazione rdt che si fa sul polo Z troveremo

$$dl = rdt \frac{\cos. m}{\sin. l}\,;\; d\lambda = - rdt \frac{\cos. n}{\sin. l^2}$$

E facendosi tutte tre le rotazioni insieme avremo per lo spostamento del polo X le due equazioni

$$d\,l \sin.\, l = d\,t\,(q \cos.\, n - r \cos.\, m)$$
$$d\,\lambda \sin.\, l^2 = -\,d\,t\,(q \cos.\, m + r \cos.\, n)$$

Alla stessa guisa si esprimeranno le traslazioni degli altri due poli Y, Z. Onde si avranno tra gli angoli l, m, n, λ, μ, ν, queste sei equazioni

$$(D)\left\{\begin{array}{l} d\,l \sin.\, l = d\,t\,(q \cos.\, n - r \cos.\, m) \\ d\,m \sin.\, m = d\,t\,(r \cos.\, l - p \cos.\, n) \\ d\,n \sin.\, n = d\,t\,(p \cos.\, m - q \cos.\, l) \end{array}\right.$$

$$(E)\left\{\begin{array}{l} d\,\lambda \sin.\, l^2 = -\,d\,t\,(q \cos.\, m + r \cos.\, n) \\ d\,\mu \sin.\, m^2 = -\,d\,t\,(r \cos.\, n + p \cos.\, l) \\ d\,\nu \sin.\, n^2 = -\,d\,t\,(p \cos.\, l + q \cos.\, m) \end{array}\right.$$

376. *Scolio I.* Dei tre angoli l, m, n basterà dall' equazioni (D) ricavarne due; che il terzo ci si paleserà dall' essere

$$\cos.\, l^2 + \cos.\, m^2 + \cos.\, n^2 = 1$$

E degli altri tre λ, μ, ν basterà dall' equazioni (E) ricavarne uno solo; che gli altri due ci si paleseranno dall' essere

$$\cos.\,(\mu - \lambda) = -\cot.\, l \cot.\, m$$
$$\cos.\,(\nu - \mu) = -\cot.\, m \cot.\, n$$

377. *Scolio II.* Per le formole raccolte in quest' articolo, conoscendo noi le tre velocità p, q, r colle quali si rivolge il sistema attorno tre assi ortogonali, conosceremo la situazione di ogni suo punto ad ogni istante: sia per mezzo dell' equazioni (C) se quei tre assi sono fissi nello spazio, sia per le equazioni (D) (E) se dessi sono mobili insieme col sistema.

CAP. XXIII.

Del Movimento d' un corpo libero sollecitato da più forze.

378. *Proposizione I.* Date le forze sollecitanti ciaschedun punto del sistema, determinare il movimento iniziale.

Si riferisca ciascun elemento $d\ M$ a tre assi ortogonali che passino pel centro di gravità, e le forze sollecitanti quell' elemento si riducono a tre P, Q, R parallele a' tre assi. Qual sia per essere il moto iniziale del corpo facilmente si raccoglie per le cose dette ne' due Capitoli precedenti.

Primiermente si vede (364. 365) che il centro di gravità dovrà muoversi secondo le x colla velocità $\frac{\Sigma . P}{M}$, secondo le y colla velocità $\frac{\Sigma . Q}{M}$, e secondo le z colla velocità $\frac{\Sigma . R}{M}$; sicchè sarà la velocità assoluta

$$u = \frac{1}{M} \sqrt{\left\{ (\Sigma . P)^2 + (\Sigma . Q)^2 + (\Sigma . R)^2 \right\}}$$

e la sua direzione farà cogli assi delle x, y, z gli angoli de' coseni $\frac{\Sigma . P}{M u}$, $\frac{\Sigma . Q}{M u}$, $\frac{\Sigma . R}{M u}$.

Secondariamente deve il corpo aggirarsi (364) sopra il suo centro di gravità; resta a vedersi attorno qual asse, e con quale velocità angolare. Siano F, G, H le somme de' momenti delle forze P, Q, R per aggirare il corpo attorno gli assi

delle x, y, z; e siano A, B, C i momenti d'inerzia d'esso corpo rispetto agli stessi tre assi rispettivamente. Le velocità angolari dp, dq, dr colle quali comincierà il corpo a girare attorno questi tre assi saranno (365) $\frac{F\,dt}{A}, \frac{G\,dt}{B}, \frac{H\,dt}{C}$. Se dunque per compendio si ponga $\sqrt{\left(\frac{F^2}{A^2}+\frac{G^2}{B^2}+\frac{H^2}{C^2}\right)}=\Omega$, l'asse istantaneo della rotazione iniziale farà (374) coi tre assi gli angoli de' coseni $\frac{F}{A\Omega}, \frac{G}{B\Omega}, \frac{H}{C\Omega}$; e sarà la velocità angolare incipiente $d\omega=\Omega\,dt$.

379. *Scolio I.* Fin qui abbiamo determinato il movimento iniziale del corpo. Ma siccome la connessione scambievole non lascia a' singoli elementi del corpo la libertà di conservare le velocità e le direzioni concepite da prima, così per determinare il proseguimento del moto ci è d'uopo ricorrere ancora a quella Proposizione (299) che c'insegna appunto a determinare i movimenti alterati dalle azioni scambievoli tra le parti componenti un sistema.

Si consideri pertanto, che essendo x, y, z le coordinate dell'elemento dM, saranno $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ le velocità colle quali quell'elemento si muove secondo le ordinate stesse. Gl'incrementi delle velocità impressi nell'istante dt dalle forze acceleratrici P, Q, R sono $P\,dt, Q\,dt, R\,dt$. Gl'incrementi delle velocità che effettivamente hanno luogo si esprimono per $d.\frac{dx}{dt}, d.\frac{dy}{dt}, d.\frac{dz}{dt}$. Ora (300)

il sistema delle forze dovute alle velocità impresse deve far equilibrio al sistema delle forze dovute alle velocità effettive, supponendole rivolte in senso contrario. Dunque se ciaschedun elemento $d\,M$ fosse animato dalle tre forze

$$dM\left(Pdt-d.\frac{dx}{dt}\right),\ dM\left(Qdt-d.\frac{dy}{dt}\right),\ dM\left(Rdt-d.\frac{dz}{dt}\right)$$

agenti rispettivamente secondo i tre assi, tutto il sistema dovrebbe ritrovarsi equilibrato.

380. *Scolio II.* Due condizioni per quest' equilibrio si richiedono (123). La prima è, che le somme delle forze parallele a ciascuno de' tre assi siano $=$ o. Quindi pigliando per costante l' incremento $d\,t$, avremo le tre equazioni

$$(A)\qquad \begin{aligned} \int P\,dM &= \int dM\,.\,\frac{ddx}{dt^2} \\ \int Q\,dM &= \int dM\,.\,\frac{ddy}{dt^2} \\ \int R\,dM &= \int dM\,.\,\frac{ddz}{dt^2} \end{aligned}$$

La seconda è che le somme de' momenti delle forze per far girare il corpo attorno ciascuno dei tre assi siano uguali a zero. Dunque per la rotazione attorno l' asse delle x dovrà essere (114)

$$\int z\,dM\left(Q\,dt-\frac{ddy}{dt}\right)-\int y\,dM\left(R\,dt-\frac{ddz}{dt}\right)=0$$

ossia

$$\int dMdt(Qz-Ry)=Fdt=\int y dM\,.\,\frac{ddz}{dt}-\int z dM\,.\,\frac{ddy}{dt}$$

E similmente operando per gli altri due assi emergeranno le tre equazioni

$$F\,dt = \int y\,dM \cdot \frac{ddz}{dt} - \int z\,dM \cdot \frac{ddy}{dt}$$

$$(B) \quad G\,dt = \int z\,dM \cdot \frac{ddx}{dt} - \int x\,dM \cdot \frac{ddz}{dt}$$

$$H\,dt = \int x\,dM \cdot \frac{ddy}{dt} - \int y\,dM \cdot \frac{ddx}{dt}$$

Ora siccome l' equilibrio d' un sistema solido si determina mediante sei equazioni (124), così per sei equazioni e non più si determina il di lui moto. Colle tre prime (A) determinasi il moto progressivo del centro di gravità; colle altre (B) si determina la rotazione del corpo attorno il centro di gravità, come nelle due Proposizioni seguenti a parte a parte dichiareremo.

381. *Proposizione II.* Determinare a qualunque tempo la posizione del centro di gravità del corpo.

Siano dopo il tempo t le coordinate del centro di gravità X, Y, Z. Sarà per la proprietà di esso centro

$$MX = \int x\,dM;\ MY = \int y\,dM;\ MZ = \int z\,dM$$

Quindi differenziando due volte e dividendo ciascuna volta per dt

$$\frac{M\,ddX}{dt^2} = \int dM \cdot \frac{ddx}{dt^2};$$

$$\frac{M\,ddY}{dt^2} = \int dM \cdot \frac{ddy}{dt^2};$$

$$\frac{M\,ddZ}{dt^2} = \int dM \cdot \frac{ddz}{dt^2}$$

Sostituendo ciò nelle equazioni (A) avremo le equazioni

$$\frac{ddX}{dt^2} = \frac{\int P\,dM}{M};\ \frac{ddY}{dt^2} = \frac{\int Q\,dM}{M};\ \frac{ddZ}{dt^2} = \frac{\int R\,dM}{M}$$

per le quali è determinato compiutamente il moto del centro di gravità.

382. *Corollario.* Queste equazioni sono precisamente quelle stesse per le quali si determinerebbe il moto d'un punto sollecitato dalle forze acceleratrici $\frac{\int P\,d\,M}{M}$, $\frac{\int Q\,d\,M}{M}$, $\frac{\int R\,d\,M}{M}$ (231). Ora se tutta la massa M del corpo fosse raccolta nel centro di gravità, e se le forze P, Q, R che agiscono sugli elementi $d\,M$ della massa fossero tutte trasportate nel centro di gravità, è manifesto che questo centro si troverebbe appunto sollecitato dalle forze acceleratrici $\frac{\int P\,d\,M}{M}$, $\frac{\int Q\,d\,M}{M}$, $\frac{\int R\,d\,M}{M}$. Conchiudasi adunque che il centro di gravità del corpo libero così si muove, come se tutta la massa vi fosse riunita, e tutte le forze vi fossero immediatamente applicate.

383. *Scolio.* Ne' primi Capitoli di questo Libro trattando de' più semplici moti d'alcuni corpi, e particolarmente de' gravi, abbiamo considerato i corpi stessi come semplici punti o atomi, prescindendo al tutto dalla massa e dalla figura loro (225). Ed ora veggiamo in fatti che il moto progressivo d'un corpo libero è sempre lo stesso come se quel corpo fosse ristretto in un punto solo, nè la massa o la figura vi apportano cambiamento. Potrà ben talvolta al moto progressivo accompagnarsi un moto rotatorio, che si determinerà poi colla seguente

384. *Proposizione III.* Determinare a qualunque tempo la posizione di qualsivoglia punto del sistema relativamente al centro di gravità.

essendosi dimostrato (347) che attorno tali assi le forze centrifughe degli elementi del corpo rotante si bilanciano fra loro in modo che l' asse ne viene egualmente tirato per ogni parte, nè più da una banda propende che dall' altra; così che un tal asse si regge immoto senza uopo di alcun sostegno.

390. *Scolio II.* Cerchiamo ora quello che avvenga se l' asse attorno cui comincia il giro non sia già l' asse principale OX, ma pochissimo se ne discosti. Da ciò intenderemo ancora quello che accadrà nel caso che girando il corpo attorno un asse principale sia la sua conversione disturbata da una minima scossa.

E perchè generalmente parlando dei tre assi principali ve ne son due a' quali compete il momento d' inerzia massimo e il minimo, e v' ha il terzo il di cui momento d' inerzia non è nè massimo nè minimo (322), distingueremo questi casi nelle due seguenti Proposizioni.

391. *Proposizione II.* Se il corpo incomincia a girare attorno un asse vicinissimo a quell' asse principale cui compete il momento d' inerzia massimo o il minimo, l' asse di rotazione anderà sempre oscillando intorno l' asse principale, rimanendovi sempre vicinissimo.

Dim. Saranno in questo caso le velocità iniziali b, c (386) non più eguali a zero, ma però piccolissime rispetto della a. Quindi l'equazione tra t e ϕ darà ϕ quantità piccolissima, onde sarà prossimamente $p = a$. Ponendo $p = a$ nelle due ultime equazioni (B') e poi differenziandole, la loro combinazione darà

$$\frac{ddq}{dt^2} - a^2 MNq = 0\,; \quad \frac{ddr}{dt^2} - a^2 MNr = 0$$

equazioni lineari, che integrate in guisa che $t = 0$ dia $q = b$, ed $r = c$, faranno conoscere i valori di q, ed r espressi per t.

Ora per ipotesi il momento d' inerzia A essendo massimo o minimo, sarà o maggiore di ciascheduno degli altri due B, C, o minore di entrambi. In ambedue i casi vedesi (386) che M ed N avranno segni contrarj. Facciasi pertanto $N = -Mk^2$ e le due equazioni diventeranno

$$\frac{ddq}{dt^2} + a^2 M^2 k^2 q = 0\,; \quad \frac{ddr}{dt^2} + a^2 M^2 k^2 r = 0$$

le quali integrate nel prescritto modo daranno

$$kq = c \sin. aMkt + bk \cos. aMkt$$
$$r = c \cos. aMkt - bk \sin. aMkt$$

Questi valori di q ed r rimangono sempre piccolissimi per quanto cresca t, e vanno continuamente liberandosi fra i limiti $q = b$, $kq = c$; $r = c$, $r = bk$. Dal che agevolmente può dedursi (374) che l' asse di rotazione va perpetuamente oscillando attorno l' asse principale, rimanendovi sempre vicinissimo, e che la velocità angolare di rotazione è presso a poco costante, non soggiacendo fuorchè a menome alterazioni periodiche.

392. *Proposizione III.* Se il corpo incomincia a rivolgersi attorno un asse vicinissimo a quell' asse principale cui non appartiene nè il massimo nè il minimo momento d' inerzia, l' asse di rotazione si dilunga indefinitamente dall' asse principale, e non si mantiene costante la velocità della rotazione.

Dim. Essendo il momento A per ipotesi intermedio fra gli altri due B, C, vedesi che M ed N avranno lo stesso segno. Facciasi $N = M k^2$. Le equazioni

$$\frac{d d q}{d t^2} - a^2 M^2 k^2 q = 0 \; ; \; \frac{d d r}{d t^2} - a^2 M^2 k^2 r = 0$$

integrate daranno

$$2 k q = (b k + c) e^{aMkt} + (b k - c) e^{-aMkt}$$

$$2 r = (b k + c) e^{aMkt} - (b k - c) e^{-aMkt}$$

Questi valori al crescere di t variano oltre ogni limite. Ond' è agevole il conchiudere che l' asse di rotazione può dilungarsi indefinitamente dall' asse principale, e che la velocità di rotazione può indefinitamente accrescersi o sminuirsi.

393. *Corollario.* Da tutto ciò si raccoglie, che sebbene sempre sia vero che la conversione d' un corpo attorno uno qualunque de' tre assi principali è di sua natura perpetua ed uniforme, tutta volta se avverrà che per qualche uuovo impulso l' asse di rotazione alcun poco s' inclini, quando quest' asse sia uno di quei due ai quali appartiene il massimo o il minimo momento d' inerzia, l' uniformità della conversione non sarà disturbata se non quanto l'asse di rotazione andrà con moto oscillatorio barcolando intorno alla sua primiera situazione. Non così avverrà se la conversione si faccia intorno al terzo asse. È dunque stabile la conversione attorno i due primi assi, istabile attorno il terzo.

SEZIONE TERZA

DEL MOTO CAGIONATO DALLA PERCOSSA.

CAP. XXV.

Della Percossa diretta e centrale.

394. Siano due corpi che camminando con moto progressivo s' incontrino. E ponghiamo che i loro centri di gravità camminino per la stessa linea retta perpendicolare al piano tangente de' due corpi nel punto di contatto. Così si avrà il caso della *percossa diretta e centrale.*

Che se la retta descritta dal centro di gravità d' uno de' corpi sia bensì normale al piano tangente, ma non passi pel centro di gravità dell' altro corpo, la percossa sarà tuttavia diretta, ma *eccentrica.*

Se finalmente la direzione del centro di gravità d' uno de' corpi non è normale al piano tangente, dicesi la percossa *obbliqua.* Consideriamo prima la percossa diretta e centrale.

395. *Proposizione.* La massa A animata della vecità V incontri la massa B animata nello stesso senso della velocità minore v. Le due masse dopo l'urto procederanno unite, e la velocità comune sarà

$$V - \frac{B(V-v)}{A+B} \quad \text{ovvero} \quad v + \frac{A(V-v)}{A+B}$$

e finalmente $$\frac{AV+Bv}{A+B}.$$

È palese in primo luogo che le due masse prenderanno per effetto dell' urto un eguale velocità, poichè se la massa A conservasse una velocità maggiore di quella che ha acquistata la massa B, questa impedirebbe tuttavia il moto dell' altra, e sussisterebbe tuttavia l' urto, il quale allora precisamente deve cessare, quando la massa B avendo presa tanta velocità, quanta ne ritiene la massa A, più non le serve d' intoppo.

Sia dunque x questa velocità comune; le forze delle due masse, che prima dell' urto erano (133) AV, Bv diveranno dopo l' urto Ax, Bx. Adunque (300) le forze AV, Bv dovranno equilibrarsi colle forze $-Ax$, $-Bx$; onde l' equazione

$$A(V-x)+B(v-x)=0$$

dalla quale si trae il valore annunciato della x.

Se il corpo urtato B è in quiete, si farà $v=0$, e se viene incontro al corpo A, si farà v negativa.

396. *Coroll. I.* La mutazione delle forze è uguale in entrambi i corpi; quella delle velocità è inversamente proporzionale alla massa.

397. *Coroll. II.* La velocità poi del centro di gravità comune de' due corpi, e la somma delle loro forze si conserva la stessa e prima e dopo l' urto.

CAP. XXVI.

Della percossa de' corpi elastici.

398. *Ipotesi.* V' ha de' corpi che nell' urto si comprimono, e dopo l' urto tendono a ripigliar la

forma primiera con forza proporzionale all' urto stesso: per modo che questa forza viene a restituir loro in senso contrario una determinata parte di quella forza, e per conseguenza di quella velocità che avevan nell' urto perduta.

399. Dicesi questa forza *elasticità*; la quale si chiama *perfetta*, se il corpo risale precisamente con tanta forza quanta perdette nell' urto; *imperfetta*, se risale con forza minore. Se v' ha de' corpi che nell' urto non si compriman punto, questi si dicono *duri*; e se compressi non ispiegano forza veruna per ripigliar la forma primiera, si dicono *molli*.

400. *Proposizione*. La massa elastica A procedente con velocità V incontri ed urti la massa elastica B animata di velocità v; e sia p il rapporto dell' elasticità alla percossa; vale a dire la frazione p esprima quanta parte della velocità perduta nell' urto riacquisti il corpo in senso contrario. Saranno dopo l' urto le velocità

della massa A . . . $v + (1 + p) \frac{B(V - v)}{A + B}$

della massa B . . . $V - (v + p) \frac{A(V - v)}{A + B}$

Chiamando tuttavia x la velocità comune, a cui per l' effetto dell' urto si ridurrebbero i corpi A, B, avrà il corpo A perduta nell' urto la velocità $V - x$, e B la velocità $v - x$. Adunque dopo l' urto, e la successiva restituzione, la velocità di A sarà (398) $x - p(V - x)$, e la velocità di B sarà $x - p(v - x)$. Ove in luogo della x ponendo il suo valore (395) $\frac{AV + Bv}{A + B}$ risulteranno le velocità quali s' è detto.

401. *Coroll. I.* Qui se facciam $p = 0$, ritorniamo al caso de' corpi non elastici, trattato nel Capo precedenle: se facciam $p = 1$, abbiamo il caso de' corpi perfettamente elastici. Generalmente però qualunque sia p troveremo avverarsi le proprietà enunciate agli articoli 396. 397.

402. *Coroll. II.* Chiamasi *forza viva* d'un corpo il prodotto della sua massa pel quadrato della sua velocità. Calcolando la perdita di forza viva che si fa nell' urto trovasi questa

$$(1 - p^2)\frac{AB(V - v)^2}{A + B};$$

ond' essa è nulla nell' urto de' corpi perfettamente elastici; massima nell' urto de' corpi non elastici.

403. *Coroll. III.* La differenza delle velocità, o sia la velocità *rispettiva*, la quale era prima dell' urto $V - v$ diviene dopo l' urto $-p(V - v)$; sicchè se i due corpi sono perfettamente elastici, la velocità rispettiva è la stessa e prima e dopo l' urto.

404. *Coroll. IV.* Se le due masse sono eguali, e perfettamente elastiche, si scambiano nell' urto le loro velocità.

405. *Coroll. V.* Un corpo elastico urtando direttamente con velocità V contro d'un ostacolo immobile, risale per la stessa linea, con velocità $= pV$. Poichè allora egli è come se la massa B del corpo urtato fosse infinita, e la sua velocità $v = 0$; nel qual caso la velocità della massa urtante A diviene $-pV$.

406. *Coroll. VI.* Facile ed elegante è la soluzione del seguente problema. Sia una serie di masse decrescenti in progressione geometrica, della quale

sia q l' esponente. La prima massa con velocità V urti la seconda che trovasi in quiete; e questa colla velocità che prenderà nell' urto vada similmente ad urtar la terza, e così successivamente. Cercasi la velocità che sarà comunicata alla massa $n$esima.

Applicando la formola dell' art. 308 si troverà che la seconda massa riceve la velocità $V.q.\frac{1+p}{1+q}$; e la terza riceve la velocità $V\left(q.\frac{1+p}{1+q}\right)^2$; ed in simil guisa la velocità della massa $n$esima riesce $V\left(q.\frac{1+p}{1+q}\right)^{n-1}$.

CAP. XXVII.

Della percossa eccentrica.

407. Proposizione. La massa A con velocità V vada ad incontrare fuor del centro di gravità la massa B animata dalla velocità v con direzione parallela a quella del corpo A. Cercasi il moto d'ambe le masse dopo l'urto.

Siano (Fig. 35) MOE, MRD le sezioni de' due corpi per un piano condotto pei loro centri di gravità T, G, e per la direzione TA della massa A; questa direzione sia lontana dal centro G della massa B dell' intervallo $GA = a$. Sia x la velocità che resterà alla massa A dopo l' urto; e poichè l' altra massa B prenderà dopo l' urto due moti (364) l' uno progressivo, l' altro rotatorio

attorno GX, sia u la velocità del primo, ω la velocità angolare del secondo.

Primieramente le forze AV, Bv deggiono (300) equilibrarsi colle forze $-Ax$, $-Bu$; onde:

$$A(V-x)+B(v-u)=0.$$

Il corpo B è spinto a rotare dalla forza che il corpo A perdette nell' urto, la qual è $A(V-x)$. Dunque chiamando S il momento d'inerzia del corpo B rispetto dell' asse GX, avremo (365)

$$\omega=\frac{Aa(V-x)}{S}.$$

Finalmente da quanto fu detto all' art. 395 apparisce che tanta velocità dee rimanere alla massa MOE quanta ne concepiscono que' punti della massa MRD che si trovano sulla linea TA, per la qual linea il corpo MOE prosegue il suo cammino: così che la velocità residua della massa urtante dev' essere tanta quanta è la velocità che prende il punto A della massa urtata. Ma la velocità residua della massa urtante è $=x$, la velocità che prende il punto A (367) è $=u+a\omega$. Sarà dunque

$$x=u+a\omega.$$

Ed ecco tre equazioni onde scoprire le tre incognite x, u, ω.

408. *Coroll. I.* Il problema non sarebbe guari più difficile, se l' una dalle due masse, o se entrambe fossero elastiche. Restituendo l' elasticità ai corpi in senso contrario una velocità proporzionale a quella che aveano nell' urto perduta, basterà trovar prima le tre velocità x, u, ω quali riuscirebbero senza l' elasticità, e poi sostituir loro rispettivamente

$$x-p(V-x);\quad u-p(v-u);\quad \omega+p\omega.$$

409. *Coroll. II.* Se il corpo urtato è legato ad un asse immobile, esso non può nè avere nè concepire per l' urto alcun moto progressivo. Rimangono dunque due sole incognite x, ω; per determinar le quali, riferendo i momenti all' asse di rotazione, si hanno come sopra le due equazioni

$$\omega = \frac{A a (V - x)}{S}; \quad x = a \omega.$$

CAP. XXVIII.

Della percossa obbliqua.

410. PROPOSIZIONE. Urtandosi due masse obbliquamente, si cerca il moto che prenderanno per l' urto.

La velocità di ciascuna delle masse si risolva in due; l' una normale al piano tangente ambe le masse nel punto di contatto, l'altra parallela a quel piano. La prima forma la percossa, e subisce que' cangiamenti che sopra abbiamo insegnato a determinare. La seconda rimane invariata, giacchè per essa i corpi non s' urtano, nè agiscon punto scambievolmente. Pertanto componendo quest'ultima colla prima modificata come richieggon le leggi della percossa diretta, si avranno le velocità, e le direzioni de' due corpi dopo l' urto.

411. *Coroll. I.* Per modo d' esempio proponghiamoci questo problema. Data la velocità e l' angolo d' incidenza d' un globo elastico sopra un piano immobile, trovare la velocità e l' angolo di riflessione.

Sia u la velocità, ed α l' angolo d' incidenza. Decompongono la velocità u in due; l'una normale al piano, che sarà $= u$ sin. α; e questa fa la percossa, in virtù della quale il globo risalirà normalmente (405) con velocità $= p\,u$ sin. α: l' altra parallela al piano, che sarà $= u$ cos. α; e questa rimane invariata.

Componendo ora le due velocità fra loro perpendicolari $p\,u$ sin. α, u cos. α si troverà la velocità di riflessione $= u \sqrt{(\text{cos. } \alpha^2 + p^2 \text{ sin. } \alpha^2)}$. E detto β l' angolo di riflessione, sarà

$$\text{tang. } \beta = \frac{p\,u \text{ sin. } \alpha}{u \text{ cos. } \alpha};\ \text{o sia tang. } \beta = p \text{ tang. } \alpha.$$

412. *Coroll. II.* Quindi se l' elasticità è perfetta, saranno la velocità e l' angolo di riflessione eguali alla velocità ed all' angolo d' incidenza.

LIBRO TERZO

DELLE FORZE MOVENTI E RESISTENTI.

CAP. I.

Qualità mecaniche de' corpi.

413. Sin qui nella materia e ne' corpi abbiamo supposte certe proprietà e certe forze, e dappresso queste supposizioni abbiamo ricercate le condizioni dell' equilibrio e le leggi del moto. Rivolgendoci ora ai corpi terresteri che ne circondano, convien vedere quali siano in realtà le qualità loro meccaniche, e quale la misura e l' indole delle forze che li traggono al moto. Nel che l' osservazione e l' esperienza soltanto ponno esserci scorta; seguendo le quali comincierem tosto col verificare la supposizione fatta sin da principio dell' impenetrabilità e dell' inerzia della materia corporea.

414. L' impenetrabilità della materia corporea provasi per un' induzione così estesa, che ben può dirsi universale. Non veggiamo infatti giammai che un corpo sottentri ad occupare lo spazio occupato prima da un altro corpo, salvo che o cacci quest' ultimo da quello spazio, o s' insinui per entro i suoi pori; i quali pori talvolta coll' occhio nudo, e sempre poi coll' occhio armato in tutti i corpi si scorgono.

415. L'inerzia esige due cose 1.° Che un corpo dalla quiete non prenda a muoversi senza l'intervento di qualche forza. 2.° Che posto in moto conservi inalterabilmente la sua velocità e la sua direzione, salvo che soppravvenga alcuna forza a cangiarla. Or la prima è verità evidente: non può un corpo prendere a muoversi senza una cagione qual ch' ella sia, altrimenti non vi sarebbe ragione perchè prendesse piuttosto tal moto che un altro: or questa cagione (9) è una forza. La seconda proprietà è manifesta per induzione: non veggiamo giammai alterarsi nè la velocità nè la direzione d' un corpo, a meno che intervenga alcuna di quelle cagioni che sappiamo altronde esser atte ad imprimer moto o a rallentarlo. E veggiamo tanto più lungamente conservarsi il moto impresso, quanto più ci riesce di rimuovere queste cause alteratrici.

CAP. II.

Della Gravità.

416. Che la gravità sia forza comune a tutti gli elementi della materia assai si rende palese dall' osservare che ogni corpo ed ogni benchè minima particella corporea, quando non sia sostenuta, cade per la verticale. Rimane a provare (58) che questa forza è costante in uno stesso corpo, ed eguale ne' diversi corpi; e resta pure ad assegnarne la misura. Per il che ci convien far vedere che il moto de' gravi cadenti è moto equabilmente accelerato; che il valore della forza acceleratrice è lo stesso qua-

lunque sia il corpo cadente; e conviene in fine determinare questo valore. Ma negli esperimenti di questo genere apportano non lieve imbarazzo le resistenze. Se facciamo cadere i corpi nel vuoto, le discese son troppo rapide per poterle confrontare co' tempi: se li lasciamo piombare da torri elevate, siccome fecero Riccioli e Grimaldi (*), incontriamo la resistenza dell' aria che cresce al crescere della velocità e snatura il moto: se li facciamo scendere per piani di dolce declivio, come fece Galileo (**), alla resistenza dell' aria s' aggiunge quella dell' attrito. E tuttavia le sperienze de' citati fisici corrisposero assai bene all' ipotesi della gravità costante. Ad ogni modo il miglior mezzo d' indagare la natura del moto prodotto dalla gravità si è quello di sperimentare le oscillazioni d' un pendolo per archi minimi; nel qual genere di moto la resistenza dell' aria non cresce oltre un certo limite, e può farsi agevolmente (296) che essa non alteri in modo sensibile il tempo dell' oscillazione.

417. *Sperienza I.* Le oscillazioni d'un pendolo per minimi archi di cerchio si trovano costantemente tutte isocrone fra loro (***); del che è facilissimo l' accertarsi, contando il numero delle oscillazioni fatte sotto eguali intervalli di tempo.

418. *Corollario.* È dunque la gravità una forza acceleratrice costante.

(*) Riccioli, *Almagestum.* Tom. I[c] lib. II, cap. 21.
(**) Galileo, *Opere.* Tom. III, pag. 102.
(***) *Idem, ivi,* pag. 56.

419. *Sperienza II.* In varie palle d' ugual diametro e peso si racchiudano pesi eguali di sostanze comunque diverse. Queste palle si sospendano con fili d' eguale lunghezza, e si facciano oscillare per archi minimi. Si troverà (*) che il tempo d' un' oscillazione è lo stesso per tutte.

420. *Corollario.* Adunque la gravita è la stessa per corpi comunque diversi. Poichè il tempo d'un'oscillazione esprimesi (284) per $t = \frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, onde si trae $g = \frac{\pi^2 a}{t^2}$. Essendo dunque t eguale per qualunque corpo, ancor la forza g dovrà essere per qualunque corpo la stessa.

Ciò si conferma col notissimo esperimento della caduta de' gravi nel vuoto; giacchè da pari altezza cade in egual tempo l' oro e la piuma.

421. *Sperienza III.* Si cerchi e si misuri colla maggior precisione la lunghezza del pendolo che batte i secondi; per la qual lunghezza vuolsi intendere (354) la distanza del punto di sospensione dal centro d' oscillazione. Ciò è stato fatto con impareggiabile diligenza in Parigi prima da Mairan poi da Borda (**) e si è trovata questa lunghezza di metri 0,9938.

422. *Coroll. I.* Adunque prendendo il metro per unità degli spazj, ed il minuto secondo per unità

(*) *Enciclopedye.* Art. *Pesanteur.*
V. anche Galileo, *l. c.*, pag. 49. 50.

(**) Mairan, *Mem. de l'Acad. des Sc.* 1735.
Borda, *V. Institut Nat.* Tom. II, pag. 79.

de' tempi, avremo $g = 9{,}8088$. Poichè nella formola $g = \frac{\pi^2 a}{t^2}$ fatto $t = 1$, $a = 0{,}9938$ riesce appunto $g = 9{,}8088$.

423. *Coroll. II.* Nel primo 1″ della discesa libera percorrerà il grave uno spazio (210) $= \frac{1}{2} g$, o sia di metri 4,9044.

424. *Scolio.* Le sperienze del pendolo siccome porgono il mezzo più semplice e più sicuro di confermare l'ipotesi della gravità uguale e costante, così sono attissime ad avvertirci di qualche eccezione a cui quell'ipotesi soggiace. E facilissima a scoprire ogni più leggiera alterazione d'un pendolo, poichè l'affrettamento o il ritardo si accumula in un gran numero d'oscillazioni, e si dà tosto a conoscere. Ora lo stesso pendolo portato in varj luoghi discosti per lungo intervallo si altera in modo assai sensibile. Così si è trovato (*) che la gravità è diversa nelle diverse latitudini, e va crescendo dall'equatore ai poli. E nelle elevazioni grandissime sopra il livello del mare si è riscontrata similmente (**) una qualche diminuzione della gravità. Ma da tutte queste anomalie può prescindersi nella Meccanica pratica, la quale non mette a confronto più corpi, se non che in brevi distanze.

(*) *V.* Newton, *Princ.*, Lib. III, Prop. 20.

(**) Bonguer, *Fig. de la Terre*, 1749, pag. 357.

CAP. III.

Dell' Elasticità.

425. Circa l' elasticità delle lastre piegate abbiamo assunta (192) questa ipotesi che in ciaschedun punto della lastra incurvata il momento col quale l' elasticità tende a far girare un latercolo della lastra per portarlo in dirittura del latercolo contiguo, e reciprocamente proporzionale al raggio di curvatura.

Siano AL, LB (Fig. 38) due successivi latercoli uguali della lastra incurvata; de' quali il secondo LB, rimossa che fosse la forza che piega la lastra si porterebbe in Lb in dirittura del primo AL. Congiungasi la Bb, e sopra di essa si conduca la perpendicolare LP che la dividerà per mezzo, essendo che il triangolo BLb è isoscele. La forza colla quale il punto B tende a portarsi in b si può avere come proporzionale alla Bb, cioè allo spazio pel quale il punto B fu rimosso dalla sua natural positura; e perchè questa forza opera nella direzione Bb, il suo momento rispetto al punto L sarà espresso per $E.Bb.LP$, essendo E una costante. Rimane a provare che questa espressione è reciprocamente proporzionale al raggio di curvatura, ossia al raggio del circolo che passa pei tre punti A, L, B.

Preso il latercolo costante $AL = LB = Lb = 1$, e l' angolo $BLb = 2\omega$, sarà $Bb = 2 \sin. \omega$ ed $LP = \cos. \omega$; quindi $E.Bb.LP = 2E \sin. \omega \cos. \omega$,

e semplicemente $= 2E$ sin. ω, giacchè l' angolo ω essendo infinitesimo può farsi cos. $\omega = 1$.

Dall' altra parte sia K il centro del circolo che passa pei tre punti A, L, B, sia il raggio $KL = R$, e dal punto K si cali sopra LB la perpendicolare KQ, che la dividerà per mezzo. Avremo l' angolo $LKQ = \omega$, ed $1 : \text{sin.}\ \omega :: KL : LQ :: R : \frac{1}{2}$. Dunque sin. $\omega = \frac{1}{2R}$. Sostituito questo valore, il momento della forza elastica diventa $\frac{E}{R}$ conforme all' ipotesi (192).

426. Da questo discorso apparisce che la Proposizione dell' art. 192 è fondata sopra questa ipotesi, che la forza tendente a restituire l' elastro sia proporzionale alla quantità della quale esso venne rimosso dalla primitiva situazione. Ma sebbene sia vero, e possa facilmente provarsi colla sperienza che quanto più l' elastro è distratto dalla natural positura, tanto si restituisce con maggior forza, non è però ben sicuro che la forza restituente sia esattamente proporzionale alla quantità della distrazione.

E lo stesso vuol dirsi dell' altra ipotesi (398) che abbiamo seguita nel calcolare l' effetto della percossa fra corpi elastici. Abbiamo assunto che la forza colla quale si restituiscono sia sempre una determinata parte di quella forza che operò la compressione. È vero che un elastico più compresso tende a restituirsi con maggior forza, ma non credo che sia egualmente sicuro che la forza di restituzione sia sempre proporzionale alla forza comprimente.

427. Pei corpi che si comprimono nell' urto, un modo facile di misurare il grado d' elasticità, ed insieme di accertare se sia proporzionale alla forza comprimente, sarebbe lo spingerli direttamente contro un piano immobile con diverse velocità, e misurare la velocità del ribalzo. Se la forza elastica è proporzionale alla forza comprimente, la velocità di riflessione avrà una proporzion costante alla velocità d' incidenza (405), e questa proporzione determinerà il rapporto dell' elasticità alla forza comprimente.

428. Il moto col quale le particelle del corpo elastico si rimettono nella prima situazione è moto accelerato, non già equabilmente, ma per gradi sempre minori; poichè gl' impulsi dell' elasticità vanno scemando (426) a misura che il corpo è meno compresso.

429. La velocità acquistata nel fine di questo moto si conserva, se il corpo è libero; che se fosse trattenuto da un ostacolo, ciascuna particella ne serberà quella parte che dalla mutua coesione e dagli altri impedimenti non è distrutta. Quindi un elastico fermato in un punto, e compresso o piegato, dopo la restituzione potrà non fermarsi quivi, e se la coesione delle sue particelle lo permetta, passerà dallo stato di prima allo stato opposto, tra quali due stati andrà oscillando sin tanto che le resistenze nol fermino. Così una lastra d'acciajo fitta orizzontalmente nel muro e piegata con forza all' ingiù, tostochè si rilascia, ripiegasi d' altrettanto all' insù, e vibra lungamente a guisa d' un pendolo.

430. Un elastico compresso tende a dilatarsi con egual forza per ogni verso, e si dilata infatti

quando non gli sia impedito dalla coesione che lega le sue particelle. Quindi ove la coesione è nulla, come ne' fluidi elastici, il conato alla dilatazione opera egualmente per ogni parte.

CAP. IV.

Elasticità dell' aria.

431. L'ELASTICITA' de' fluidi aeriformi è forza di singolare energia, operatrice di maravigliosi effetti, e l' umana industria ne trae gran profitto volgendola agli usi meccanici. Adunque molto rileva il conoscere e misurar giustamente questa forza in que' fluidi de' quali ci possiamo più utilmente valere. Tali sono l' aria ed i vapori acquei.

432. L' elasticità de' fluidi si esercita con eguale sforzo per ogni parte (430); quindi la pressione d' un fluido elastico sopra una data base è sempre proporzionale alla base premuta. Immaginiamo una colonna prismatica d' una nota sostanza, per esempio di mercurio, che insista normalmente su questa base, e premendola con tutto il suo peso equilibri lo sforzo del fluido elastico. L' altezza di questa colonna misurerà la forza che fa il fluido contro quella base per la sua elasticità. Giova poi prescegliare il mercurio, affine di paragonar prontamente le elasticità de' diversi fluidi con quella dell' aria libera, la quale, come è noto, misurasi dall' altezza media del barometro, o sia dall' altezza d' una colonna di mercurio di metri 0,76.

433. *Sperienza I.* A scoprire come cresca l' elasticità dell' aria mentre cresce la sua densità; adoprò Mariotte (*) un lungo sifone di due rami cilindrici verticali uniti da un corto tubo orizzontale. Erano i rami di lunghezza ineguale; il più corto chiuso ermeticamenta alla cima, il più lungo aperto. Per esso versò nel sifone un po' di mercurio, tanto solo che bastasse ad empiere il tubo orizzontale, e confinar l' aria nel ramo più corto. Ciò fatto andò versando altre ed altre quantità di mercurio, e notando ad ogni ripresa il livello al quale si stabiliva in ambi i rami. Così potè scorgere facilmente con qual proporzione andasse erescendo la densità e l' elasticità dell' aria racchiusa nel corto ramo; poichè la densità dovea crescere in ragione inversa degli spazj ne' quali l' aria si andava successivamente restringendo; l' elasticità poi era misurata dalla differenza di livello del mercurio ne' due rami, aggiuntovi metri 0,76 per il peso dell' atmosfera premente sul ramo più lungo.

434. *Corollario.* Il risultato di molte prove fatte nell' indicata guisa fu questo, che in pari temperatura l' elasticità dell' aria è proporzionale alla sua densità.

435. *Scolio.* Questa proporzionalità che si riscontra nelle mezzane compressioni dell' aria, non si potrebbe con egual sicurezza estendere anche alle massime ed alle minime compressioni: poichè in queste non se n' è fatta la prova, ed altronde può

(*) *Mouvement des eaux*, Part. II, Disc. II.

ben variare indefinitamente il peso comprimente, ma non può variare indefinitamente la densità.

436. *Sperienza II.* A scoprire come cresca l' elasticità dell' aria mentre cresce la sua temperatura sono opportunissime le sperienze del Sig. Volta (*) sulle dilatazioni dell' aria pel calore. Avendo preso un globo cavo di vetro che terminava in uno stretto tubo cilindrico minutamente graduato, ed avendone diligentemente misurata la capacità, riempillo in parte con olio, rimanendo il resto pien d' aria. Poi turatane la bocca col dito, capovolto lo sommerse in una tina piena d' olio. L' aria racchiusa sorse alla cima, occupando la capacità del globo e la superior parte del tubo; essa oltre la pressione atmosferica sostenea quella dell' olio corrispondente all' altezza del livello della tina sopra l' infimo confine dell' aria. Questa fece egli passare per tutti i gradi di temperatura da quella del ghiaccio sino a quella dell' acqua bollente, il che conseguì collo scaldare a poco a poco l' olio del vaso ambiente. Osservava di grado in grado quanto si dilatasse nel tubo l'aria rinchiusa; e perchè la pressione fosse sempre la medesima, aveva l' avvertenza di andar sollevando ad ogni volta il tubo, tanto che l' infimo confine dell' aria rimanesse sempre alla stessa profondità sotto il livello della tina. In tal maniera trovò che sotto la stessa pressione, per ogni grado del termometro di Reaumur di cui la temperatura crescesse, cresceva il volume dell' aria uniformemente di $\frac{1}{215}$ del

(*) *Ann. di Chimica di* Brugnatelli, T. IV.

volume primitivo che avea alla temperatura zero; il che torna ad $\frac{1}{268}$ per ogni grado del termometro centigrado, col quale termometro in appresso misureremo le temperature.

437. *Scolio I.* Assai tempo dopo le memorate sperienze del Sig. Volta, Gay Lussac (*) e Dalton con diversi apparati e modi di sperimentare hanno confermato gli stessi risultamenti; cioè che la dilatazione dell' aria pel calore è uniforme ed è di $\frac{1}{268}$ per ogni grado di temperatura. Hanno trovato di più che tutti i gas permanenti si dilatano pel calore allo stesso modo dell' aria. Ma non può negarsi al Sig. Volta la lode d'essere stato il primo a stabilire con sicurezza questo punto ch' era molto dibattuto tra fisici, dalle sperienze de' quali nasceva grandissima varietà e discordanza d' opinioni. Pressochè tutti trovavano la dilatazione dell' aria non uniforme, e chi la faceva assai più grande, chi più piccola. Il Sig. Volta mostrò che queste diversità nascevano dall' umidità che non era stata esclusa a dovere. Operando nell' aria perfettamente secca, tutte le anomalie scomparvero, e si rendette manifesta la vera legge e la misura delle dilatazioni dell' aria pel calore.

433. *Coroll. I.* Di qui si raccoglie che in pari densità l' elasticità dell' aria presa alla temperatura del ghiaccio si accresce di $\frac{1}{268}$ del suo valore per ogni grado di cui cresca la temperatura.

(*) *V.* Biot, *Traité de Physique*, Liv. I, Chap. IX.

Poichè nella narrata sperienza, giunti alla temperatura di gradi t, l'elasticità primitiva avrebbe dovuto scemare (434) nel rapporto di $1 + \frac{t}{268}$ ad 1, in grazia della densità diminuita nello stesso rapporto. Ma l'elasticità rimase la stessa. Adunque tanto crebbe per l'aumento di temperatura quanto dovea scemare per lo scemamento della densità, che è quanto dire di $\frac{t}{268}$ del suo valore primitivo.

439. *Coroll. II.* Sia P l'elasticità dell'aria nella densità $= 1$, ed a temperatura di gradi o; p l'elasticità della medesima nella densità $= q$, ed alla temperatura di gradi t. Sarà

$$p = Pq\left(1 + \frac{t}{268}\right).$$

440. *Scolio II.* Anche questa Proposizione vuolsi restringere entro que' limiti di temperatura ai quali si stendono le sperienze; vale a dire della temperatura del gelo a quella dell'acqua bollente. Oltre quei limiti, la variazione dell'elasticità pel calore potrebbe per avventura seguire altra legge.

441. *Scolio III.* Vuolsi ancora intendere dell'aria perfettamente asciutta; l'aria umida e vaporosa non si dilata equabilmente, cosicchè ad eguali incrementi di temperatura non corrispondono dilatazioni uguali, ma sempre maggiori. Ond'è a conchiudere che ancor l'elasticità non cresce in proporzione della temperatura, ma in proporzion maggiore. Di che avremo ben tosto una diretta conferma.

CAP. V.

Elasticità de' vapori acquei.

442. Egli è fuor di dubbio che l' elasticità de' vapori dipende dagli stessi elementi che quella dell' aria; dalla densità e dalla temperatura. Quindi parrebbe che come per l' aria così pei vapori dovessimo separare questi due elementi, e ricercare partitamente gli effetti di ciascheduno, col far variare la densità mentre la temperatura rimanesse costante, e viceversa. Ma ci libera da questa fatica una singolare proprietà de' vapori scoperta ed assicurata non ha guari da diligentissimi fisici; e questa è che la loro densità dipende necessariamente dalla temperatura, di modo che a ciaschedun grado di temperatura corrisponde un certo e determinato grado di densità che si mantiene costante per quanto o si ristringa, o s' allarghi lo spazio pel quale il vapor si diffonde. E questo avviene perchè ristringendosi lo spazio, una parte del vapore si condensa e si risolve in acqua; e dilatandosi lo spazio, l' acqua sottoposta sviluppa nuova quantità di vapore, onde in somma la densità non si muta.

443. Per altro questa costante densità del vapore ha luogo solamente quando siavi una quantità d' acqua sufficiente a fornire tal quantità di vapore da riempiere tutta la capacità dello spazio nel quale il vapor si diffonde, e mantenerlo in quel prefisso grado di densità. In caso diverso, la densità del

vapore sarà necessariamente più piccola, ed anderà continuamente scemando di mano in mano che si dilata la capacità del recipiente; e per lo contrario ristringendo questa capacità, la densità anderà crescendo sin tanto che giunga a quel prefisso grado, nel quale poi si manterrà costante, per quanto seguiti ad impicciolirsi lo spazio.

Quando si adopera il vapore come agente meccanico, havvi sempre un serbatojo d'acqua capace di svolger nuovo vapore onde mantenere saturo lo spazio recipiente. Per il che noi potremo sicuramente supporre il vapore costituito in quel grado di densità che la sua temperatura comporta, ed indagare quanto s' accresca la sua forza elastica all'accrescersi la temperatura.

444. *Sperienza*. Quest' indagine è stata ultimamente fatta con singolare diligenza da Dalton (*). Il suo apparato consiste in un semplice tubo barometrico, di cui, prima d' introdurvi il mercurio, si bagnavano le pareti interne; poscia introdotto nella solita guisa il mercurio ben purgato dall'aria, raddirizzato il tubo, e sommersa la di lui bocca in uno stagnetto di mercurio, l' umidità introdotta si raccoglieva tutta nel vuoto che rimanea verso la cima, ed una falda sottile d' acqua stendevasi sulla superficie del mercurio. Allora s' innalzava per gradi la temperatura, versando dell' acqua di mano in mano più calda entro un cannone che attorniava

(*) *Memoires de Manchester*, 1805. *V. Bibl. Britann.* Tom. XX. XXI, *et* Biot, *Traité de Physique*, Livr. I, Chap. XIII.

tutto il disopra del tubo. Al crescere la temperatura, la colonna del mercurio s'andava abbassando. Sottraendo l'altezza di questa colonna dall'altezza che rappresenta la pressione dell'atmosfera, vale a dire dell'altezza del mercurio in un barometro comune, avevasi la misura dell'elasticità del vapore.

445. *Scolio I.* Fermata la colonna del mercurio in quell'altezza che corrisponde al grado della temperatura, si è fatto la prova di abbassare il tubo, portando la sua bocca a maggiore profondità nel sottoposto stagnetto di mercurio; o per lo contrario di sollevarlo; e si è trovato che in ambedue i casi l'altezza della colonna di mercurio elevata sopra il livello dello stagnetto rimane sempre la stessa. Questo è un contrassegno evidente che anche l'elasticità del vapore rimane la medesima con tutto che nel primo caso si diminuisca la capacità dello spazio occupato dal vapore, e nel secondo s'accresca. E ciò conferma che la densità del vapore in una stessa temperatura rimane costante, come di sopra si è detto (442).

446. *Coroll. I.* La corrispondenza tra la temperatura del vapore e la sua forza elastica riuscì a questo modo

Temperatura	*Elasticità*
o	m
0	0,005
10	0,009
20	0,017
30	0,031
40	0,053
50	0,088
60	0,145
70	0,228
80	0,352
90	0,525
100	0,760
110	* 1,069
120	* 1,462
130	* 1,941

Giova avvertire che coll' apparato di Balton la temperatura non si poteva alzare oltre il grado dell' acqua bollente; quindi le elasticità corrispondenti alle temperature maggiori di 100, non furono già osservate, ma bensì calcolate dal supposto che progrediscano colla stessa legge colla quale van procedendo nelle temperature inferiori, la qual legge prenderemo ora ad investigare.

447. *Coroll. II.* Crescendo le temperature in progressione aritmetica, crescono le elasticità a un di presso in progressione geometrica. Ed in fatti si troverà che i loro logaritmi crescono con differenze presso a poco uguali.

448. *Coroll. III.* Ma queste differenze de' logaritmi sebbene non molto diverse fra loro, pure non si mantengono rigorosamente costanti, ma vanno anzi lentamente diminuendosi a misura che la temperatura s' innalza. Ond' è a conchiudere che veramente le forze elastiche crescono meno di quello che porti la progressione geometrica.

449. *Coroll. IV.* Il Sig. Laplace (*) ci ha dato una formola che rappresenta con molta puntualità i risultati delle sperienze di Dalton, e così rappresenta la vera legge degl' incrementi dell' elasticità del vapore. Dicasi la temperatura t, p l' elasticità corrispondente. Sarà

$$p = 0{,}76 .\ 10^{k(t-100)-m(t-100)^2}$$

avendo i coefficienti k, m i seguenti valori

$$k = 0{,}0154547 \quad ; \quad m = 0{,}0000625826.$$

450. *Scolio II.* Con questa formola si calcola speditamente l' elasticità conveniente a ciaschedun grado di temperatura, poichè basterà al logaritmo di 0,76 aggiungere il numero $k(t-100) - m(t-100)^2$ per ottenere il logaritmo di p.

451. *Scolio III.* Anche il Sig. di Bettancour (**) attese con molta diligenza a questa indagine della forza elastica de' vapori. Il suo apparato consiste in un tino o caldaja che egli empiè d' acqua per una determinata porzione, poi la chiuse perfettamente,

---

(*) *Mécanique Céleste,* Tom. IV, pag. 272.

(**) *Experiences sur la force expansive de la vapeur de l'eau.* Paris, 1790

V. Prony, *Arch. Hydr.*, Tom. I *et* II.

e ne cavò l' aria, indi con un sottoposto bragiore innalzò gradatamente la temperatura e dell' acqua e del vapore che da essa diffondevasi nel vano della caldaja. Un lungo barometro a sifone comunicava coll' interno del tino. A misura che il vapore riscaldandosi acquistava forza, scendeva il livello del mercurio nel ramo vicino del sifone, e s' alzava nell' altro ramo. La differenza di livello misurava l' elasticità del vapore, mentre un termometro tuffato col bulbo nella caldaja, e sporgente fuor d' essa col lungo gambo mostrava la temperatura corrispondente.

I risultamenti delle sperienze di Bettancour sebbene non coincidono precisamente con quelli delle sperienze di Dalton, tuttavia vi sono abbastanza conformi. E così questa legge della natura che stabilisce la corrispondenza tra la temperatura e l' elasticità del vapore acqueo è pienamente assicurata con due serie di sperienze istituite con diverso processo.

452. *Scolio II.* Crescendo l' elasticità assai più rapidamente che non fa la temperatura, scorgesi che nelle altissime temperature può giungere la forza del vapore a un segno sorprendente, e acquistan fede i prodigiosi effetti che se ne citano.

CAP. VI.

Forza della polvere d' archibugio.

453. LA violenta elasticità della polvere d' archibugio accesa in ristretto spazio è quella stessa de'

vapori dell'acqua, di quelli dell'acido nitrico, e forte d'altri fluidi aeriformi che nell'accensione della polvere svolgonsi all'improvviso in gran copia. La forza loro dipende soltanto dalla densità, poichè la temperatura è costante; la densità poi varia secondo il rapporto della quantità della polvere allo spazio entro del quale è ristretta. Di qui è nato lo studio di ricercare in qual proporzione s' aumenti l' elasticità del vapor della polvere, crescendo in data proporzione la densità. Riferiremo le più recenti sperienze tentate su questo punto dal Sig. di Rumford (*).

454. *Sperienza.* Servì a questa sperienza un provetto consistente in un cannoncino di ferro di grosse e salde pareti, della capacità interna di millimetri cubi 1472. Ei v' introdusse prima una piccolissima carica di polvere del peso di grammi 0,061; la qual carica riempiva 0,039 dell' interna capacità. L' area della bocca del provetto era millimetri quadrati 31,66; ad essa sovrappose un piano che la turasse esattamente, e questo piano aggravò d' un grosso peso. In questa capacità tutta chiusa accendea la polvere da fuori col calore d' un ferro rovente appressato a una protuberanza che l'interna capacità faceva espressamente. Per tal modo istituì una serie di prove, collo sgravare a poco a poco il piano che chiudea la bocca del provetto, sino a trovare quel peso che dallo scoppio della polve appena appena venisse smosso. Ciò fatto ripetè la sperienza introducendo nel tubo quantità doppia di polvere, indi tripla, e così in seguito. Così crescendo la densità del vapore

(*) *Philosoph. Transact.*, 1797, Part. I.

in serie aritmetica, egli aveva ad ogni sperienza la corrispondente elasticità misurata da quell' ultimo peso che la forza del vapore aveva potuto superare.

455. *Coroll. I.* I risultati delle sperienze furono come qui appresso. La prima colonna mostra il rapporto col quale crescevano le densità; la seconda indica le elasticità corrispondenti espresse nel modo spiegato all' art. 432: al qual effetto abbiam ridotto ciascun de' pesi osservati al peso d' una colonna di mercurio insistente sulla sezione della bocca del tubo, e prendiamo l' altezza di questa colonna per misura della forza elastica.

Densità	*Elasticità*
1	59^{m}
2	100
3	219
4	290
5	426
6	. . .
7	617
8	885
9	1179
10	1432
11	1686
12	1956
13	2499
14	3046
15	3589
16	5388
17	. . . .
18	8342

456. *Coroll. II.* L' elasticità non cresce in proporzione della densità, siccome opinò Robins (*), ma in una proporzione di gran lunga maggiore.

La legge di questo accrescimento non è facile a scoprirsi, atteso lo sregolato andamento della serie de' numeri che rappresentàno le elasticità: nè mi sembran molto felici i tentativi del sig. di Rumford per tale oggetto. E altronde i risultati di siffatte sperienze non comportano molta precisione.

457. *Coroll. III.* Falsa parimente è l' opinione dello stesso Robins (**) che la massima forza della polvere corrispondente al massimo grado di densità non sia che mille volte maggiore della pressione atmosferica. Qui noi la troviamo assai più forte, e siamo ancora ben lungi dalla densità massima. Non abbiamo sperienze che possano indicarci il sommo grado di questa forza.

458. *Scolio I.* Se nelle scariche de' pezzi d' artiglieria la polvere agisse colla massima energia della quale è capace, non vi sarebbe pezzo sì forte che non si fendesse al primo colpo. Se ciò non avviene, egli è 1.° perchè la palla non tura esattamente la luce del pezzo; 2.° perchè la polvere s' infiamma rapidamente sì, ma non in istante; onde avviene che non sì tosto la porzion di polvere che prima s' accese ha slontanato l' ostacolo, accendendosi il resto in uno spazio meno angusto esercita uno sforzo minore. Di qui si comprende quanto sia difficile il

(*) *V.* Robins, *Nouveaux Principes d' Artillerie comm. par* Euler, Prop. 3.

(**) *Ibid.* Prop. 6.

determinare teoricamente la forza onde la palla è cacciata.

459. *Scolio II.* Perciò i mezzi migliori ad avvalorare ove sia d' uopo la forza della carica sono diretti a far sì che l'obice chiuda esattamente la carica, ed al primo scoppio della polvere ceda lentamente, dandole tempo d' accendersi per intero, prima che lo spazio notabilmente s' allarghi. Da ciò dipende l' efficacia della pratica ultimamente introdotta nello spezzare le roccie a forza di polvere; la qual consiste (*) nel chiudere il meato della mina con fina sabbia senza punto calcarla.

CAP. VII.

Forza degli agenti nominati.

460. Tanti e sì variabili elementi concorrono a modificare la forza degli animali, che ne diviene oltremodo difficile richiamarla a certa misura. Cercheremo di trarre dall' osservazione e dalla sperienza quelle più sicure notizie che essa potrà somministrarcene. Ma per ordinare nel miglior modo le nostre ricerche gioverà prima distinguere e ridurre a certi capi le principali cagioni abili ad indur varietà nel valore di codeste forze.

461. Varia in primo luogo la forza non solo nelle diverse specie d' animali, ma anche ne' diversi individui. La qual varietà dipende 1.° Dalla particolar

(*) *V. Biblioth. Britann.*, Tom. XXIII.

costituzione dell'individuo, e dal complesso delle cagioni che ponno influirvi. 2.° Dalla particolare destrezza acquistata per l'abitudine. Ognun vede non potere questa varietà sottomettersi a veruna legge, nè esservi altro compenso fuorchè quello di cercare de' risultati medj, deducendo da moltiplicate prove la forza degl' individui di mezzana attitudine.

462. Varia in secondo luogo la forza giusta la diversità del lavoro. Diversi muscoli agiscono ne' diversi atteggiamenti dell' animale che fatica; ad alcune azioni è d' ajuto, ad altre d' aggravio il peso stesso della macchina animale: onde non è a stupire che in varj generi di travaglio sia diversa la forza. Così altra è la forza dell' uomo nel portare un peso, altra nel tirarlo o sospingerlo orizzontalmente, altra nel tirarlo o sospingerlo verticalmente. A queste tre maniere d'azione che ora separatamente ora congiuntamente s' esercitano, parmi che si possano ridurre tutte quelle che d'ordinario s' adoperano ne' lavori maccanici.

463. Varia in terzo luogo la forza secondo la diversa durata del lavoro. Altra, per esempio, è la forza che l' uomo può esercitare in un conato di pochi istanti, altra quella che può mantenere equabilmente con azione continua, o da brevi intervalli interrota, per una giornata intera di lavoro, senza affaticarsi di soverchio. Chiameremo *forza assoluta* la prima; la seconda *forza permanente*. Giova conoscerle entrambe, venendo spesso in acconcio di prevalersi or dell' una or dell' altra.

464. Varia finalmente la forza secondo la diversa velocità con cui l'animale nell'atto del faticare

muove o tutto il corpo, o quella parte che agisce. Massimo è lo sforzo dell' animale quand' egli sta fermo; s' infievolisce allorchè cammina, a misura della sua velocità; essendovi in ultimo tal grado di velocità che lo rende incapace d' ogni sforzo.

465. Parecchi Scrittori (*) con molta lode d' ingegno hanno tentato di trarre direttamente dalla considerazione della macchina animale e della sua disposizione ne' diversi atteggiamenti la misura e le varietà della sua forza. Ma troppi dati ci mancano per giungere a questo scopo. Quindi è convenuto loro assumere altre ed altre ipotesi presso che arbitrarie: onde avvien poi che quand' anche l' ultimo risultato concordi colle sperienze, non si possa conchiuderne nulla di certo in conferma degli assunti principj, e della giustezza della teoria. Pertanto parmi miglior consiglio ricorrere immediatamente alle osservazioni ed alle sperienze per trarne, se fia possibile, la misura della forza degli animali, e le modificazioni che v' inducono le circostanze di sopra notate.

CAP. VIII.

Della forza assoluta dell' uomo.

466. Ad esplorare la forza assoluta dell' uomo in diversi atteggiamenti utilmente s' adopera il dina-

---

(*) De la Hire, *Mém. de l'Acad. de Paris*, 1699.
Lambert. *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1776.

mometro di Regnier. Consiste questo strumento (*) in una molla ellittica, che si stringe o col premere l' un contro l' altro i due vertici dell' asse minore, o col tirare in senso contrario i due vertici dell'asse maggiore. Nell' un caso e nell' altro i fianchi della molla s' accostano, e con questo muovono un indice, che percorrendo colla sua punta un semicircolo graduato segna la quantità dell' accostamento.

La divisione del semicircolo è doppia: la prima pel caso che si comprimano i vertici dell' asse minore l' un contro l' altro; la seconda pel caso che quelli dell' asse maggiore si stirino in parti contrarie.

La prima divisione si fa a questo modo: Si colloca il dinamometro coll' asse minore verticale, ed avendo saldamente fermato il termine inferiore di quest' asse, si comincia a caricare il vertice superiore con pesi crescenti d' un chilogrammo per volta; e i punti ne' quali l' indice successivamente si ferma segnano i gradi corrispondenti a quei pesi. La seconda divisione si compie allo stesso modo collocando il dinamometro coll' asse maggiore verticale, e col vertice di sopra saldamente fermato, indi aggravando il vertice inferiore di pesi crescenti con differenze uguali.

Mediante questa macchinetta si è provata la forza media dell' uomo 1.° nello stringere con una o due mani un corpo; 2.° nel tirare e sollevare un peso verticalmente; 3.° nel tirarlo orizzontalmente. Questi tre esperimenti riuscirono come segue:

(*) *Journal. Polytech.*, Chap. V.

467. *Sperienza I.* Per esperimentare la forza del pugno, s' impugna il dinamometro verso l' asse minore, e stringendo a tutta possa, l' indice sulla prima graduazione segna il peso equivalente alla forza che si fa nello stringere. Per molte prove è risultato equivalere la misura media di questa forza a chilogrammi 50.

468. *Scolio.* Alcune curiose particolarità furono avvertite nell' atto di questi esperimenti. La più comoda e più vantaggiosa attitudine nello stringere è quella di portare avanti le braccia, chinandole ad angolo semiretto colla verticale. La destra comunemente stringe più forte della sinistra: lo sforzo che fanno ambe insieme eguaglia la somma degli sforzi che fanno separatamente.

469. *Sperienza II.* Per esperimentare la forza dell'uomo nel sollevare un peso verticalmente, si colloca il dinamometro coll' asse maggiore verticale; il vertice inferiore per mezzo d' un uncino si attacca al suolo; al vertice superiore mediante un altro uncino s' attacca un braccetto orizzontale, cui l' uomo prende con ambe le mani e trae all' insù verticalmente quanto può. Allora l' indice nella seconda graduazione segna il peso equivalente alla forza. La media misura di questa forza risultò di chilogrammi 130.

470. *Scolio I.* Qui la posizione più vantaggiosa si è quella di tenersi col corpo ben diritto e verticale; soltanto le spalle un po' chine in avanti. E questa posizione è di gran momento, potendo così reggersi un peso di gran lunga maggiore che in qualunque altra attitudine.

471. *Scolio II.* Ancorchè non siasi cimentata col dinamometro nè la forza che fa l'uomo allorquando in vece di tirare verticalmente all' insù, sostiene o solleva il peso col tirare o collo spingere verticalmente all' ingiù, nè quella che esercita nel portare un peso sugli omeri, tuttavia egli par verisimile che la media misura di questi sforzi debba essere bensì alquanto maggiore, ma non di molto, di quella che si è accennata qui sopra. Il maggior peso cui l'uomo di mediocre tempra può reggere per qualche tempo, stando fermo, si reputa infatti comunemente di chilogrammi 150.

472. *Sperienza III.* Per esperimentare la forza dell'uomo nel tirare orizzontelmente, si adopera il dinamometro come nella precedente sperienza, salvo che egli è collocato coll' asse maggiore orizzontale. Nel qual modo essendosi fatte molte prove, n'è risultato che la forza media dell' uomo allorchè trae orizzontalmente in quella attitudine nella quale comunemente si mettono gli uomini che tiran biroccie o battelli, è di chilogrammi 50.

473. *Scolio.* Ne' diversi individui varia moltissimo la forza assoluta sì nell' azione dello stringere, come in quella del tirare verticalmente; non è così nel tiro orizzantale; nella quale azione la diversità della forza è circoscritta fra limiti assai ristretti in paragone delle altre. La forza degli uomini più robusti nel tiro orizzontale non eccede guari chil. 60, superando così di soli 10 chilogrammi la forza media. La ragione di questa rimarchevole differenza può essere che nel tirare orizzontalmente l'uomo s'ajuta più del suo peso che della forza de' muscoli,

laddove le altre azioni dipendono totalmente dalla forza muscolare. Ora per quanto diversifichi il peso ne' varj uomini, pur questo divario è senza comparazione minore di quello che nella forza muscolare di diversi individui la natural disposizione e l' esercizio sogliono indurre.

CAP. IX.

Della forza permanente dell' uomo.

474. A proccaciarsi nozioni esatte e sicure sulla misura di questa forza non v' è miglior mezzo che l' osservare seguitamente i lunghi lavori de' giornalieri pagati ad opera, e notare lo sforzo che fanno, la prestezza colla quale camminano, la durata, e gl' interrompimenti della fatica. Le prove che si sono tentate facendo faticar per brev' ora ed appostatamente alcuni operaj, poco o nulla conchiudono. Può facilmente l' uomo sforzare per breve tempo il lavoro, nè lascia mai di farlo allorchè s' avvede ch' egli è osservato e che si vuol far prova della sua forza. Convien dunque abbandonare siffatti tentativi, e dall' osservazione piuttosto che dalla sperienza cercar dei lumi. Eppur appena v' è alcuno che siasi applicato a tali osservazioni, che son pur facili a farsi da chi n' è a portata. Alcune ne ha raccolte con molta cura e sagacità il Sig. Coulomb (*). Qui recheremo quelle che a' più comuni lavori meccanici si riferiscono.

(*) *Instit. National*, Tom. II.

475. Ma prima conviene assumere una misura certa e costante a cui riportare la forza della quale si tratta. La forza assoluta esercitandosi dall' uomo mentre sta fermo, ha per sua naturale misura il peso che esso può reggere o smovere: ma la forza permanente esercitandosi dall' uomo mentre cammina, o move parte del corpo, bisogna tener conto non solo del peso trasportato, ma ancora della velocità colla quale si trasporta. Desumeremo adunque l' *effetto* della forza permanente dal prodotto del peso per la sua velocità.

Cercandosi poi l' effetto dalla forza permanente in un' intera giornata di lavoro, egli è chiaro che nel paragonare la forza permanente che si esercita in diversi lavori, il tempo del lavoro essendo lo stesso, la velocità è proporzionale allo spazio percorso. Adunque nel far questo paragone potremo ancora prender per misura dell' effetto il prodotto del peso per lo spazio pel quale esso vien trasportato nell' opera intera d' un giorno.

476. *Sperienza I.* Osservato il lavoro di varj facchini incaricati di portar certe robe a distanza di metri 2000, ciascun d'essi portò nella giornata chilogrammi 348, in sei viaggi, caricandosi di 58 chilogrammi per volta.

Qui l' effetto utile esprimesi col prodotto $348 \cdot 2000 = 696000$.

477. *Scolio.* L' effetto riesce maggiore, allorchè l' uomo caricandosi di minor peso cammina seguitamente senza alternative di scaricare e ricaricare, e senza l' interrompimento de' ritorni a vuoto. Interrogato da Coulomb più d' uno di que' merciaj che

viaggiano carichi della lor merce, raccolse dalle loro risposte che col peso di chil. 44 potean camminare 19000 metri per giorno. L' effetto utile ne risulterebbe = 836000. Quantunque abbiasi per esagerata quest' asserzione, siccome sospetta Coulomb, pur non lascia d' apparire in questa maniera d' azione un sensibil vantaggio sopra della precedente.

478. *Sperienza II.* In simil guisa altri facchini portarono in un giorno chil. 4404 di legna per ciascuno, salendo una comoda scala; all' altezza di metri 12. Faceano nella giornata 66 viaggi, e si caricavano di 66,7 chil. ogni volta, e può dirsi 68 pel peso delle corde e fermagli.

Qui per misurare giustamente l' effetto farebbe d' uopo conoscere precisamente l' inclinazione della scala, dovendosi moltiplicare il peso non già per l' altezza verticale a cui fu levato, ma per lo spazio corso in lunghezza. Altrove suppone Coulomb che l' altezza d' una comoda scala sia un terzo della sua base orizzontale; se questa era tale, fu la lunghezza del cammino di metri 37,95; e l' effetto utile = 68 . 66 . 37, 95 = 170320. Ad ogni modo è palese che in quest' azione l' effetto utile è molto minore che ne' trasporti per via piana; cosa ben naturale, atteso il contrasto del proprio peso che convien pur levare insieme colla carica.

Il tempo del lavoro diurno era di sei ore e mezza, ma molto interrotto; poichè ogni salita dell' uom carico compievasi in minuti 1,1 circa; cosicchè la durata dell' azion faticosa non oltrepassava ore 1 minuti 12 nella giornata, e la velocità dalla salita era di metri 0,575.

479. *Sperienza III.* Il processo ordinario del battipalo, secondo l' osservazione di Coulomb, è come segue. Tal numero d'uomini s'adopera comunemente a levare il mazzo, che ciascuno ne solleva chil. 19. Ad ogni strappata si solleva il mazzo metri 1,1. Battono venti colpi per minuto, e dopo trè minuti d' azione riposano per altrettanto tempo, poi ricominciano. Così durando tutta l'opera giornaliera ore sei, la durata dell' azion faticosa non oltrepassa tre ore. Contuttociò è questo assai penoso lavoro, nè comporterebbe durata di molti giorni senza scapito di salute ed esaurimento di forza.

Qui l' effetto utile è $= 19.1,1 . 3600 = 75240$.

Ecco un' altra osservazione di Lamandé Direttore della fabbrica del ponte di Jena (*). Trentotto operaj lavorando 10 ore al giorno, fanno ciascun ora 12 volate, ognuna di 30 colpi. Quindi 3600 colpi al giorno, appunto come nell' osservazione di Coulomb. Il mazzo pesa chil. 587, e s' alza metri 1,45.

Secondo questa osservazione, l' effetto utile sarà $\frac{587}{38} . 1,45 . 3600 = 80635$; risultato non molto lontano da quello di Coulomb.

480. *Sperienza IV.* Osservati lungamente gli operaj sotto la fatica di girare la manovella, ha rilevato Coulomb che esercitando essi continuamente uno sforzo equivalente al peso di chil. 7 compiono da venti giri per minuto, essendo la circonferenza del giro metri 2, 3. Stanno ott' ore al lavoro, ma

(*) Hachette, *Trait des machines*, pag. 10.

pei riposi de' quali di tempo in tempo abbisognano, il tempo della fatica diurna non eccede ore sei.

Sarà dunque l'effetto utile $=7.2,3.7200=115920$.

481. *Scolio.* Per alcune prove altri (*) hanno trovato in questo genere d'opera un effetto di gran lunga maggiore. Essi contano almeno ott' ore di effettivo lavoro, a 30 giri per minuto, e con uno sforzo continuo di chil. 12, 2. L'effetto ne risulterebbe $=404064$. Ma abbiamo già avvertito (474) quanto siano ingannevoli cotali prove, e qui ne abbiam la conferma.

482. *Sperienza V.* Ne' trasporti di terra colle carriole, avvegnachè il peso della carretta sia per ordinario circa chil. 30 e si carichi di 70 chilogrammi di terra, tuttavia l'operajo non porta che 18 in 20 chilogrammi, posando il resto sul suolo: insieme egli spinge con forza che può stimarsi di 2 in 3 chilorammi, che tanto in circa gli basta per vincer l'attrito della carretta carica sopra un piano asciutto: sebbene le irregolarità del suolo, e la destrezza dell' operajo rendono questo sforzo ora maggiore, ora minore. Ritorna poscia per altrettanto cammino colla carretta vuota, ed allora non porta più di 5 in 6 chilogrammi, e pochissima forza gli basta per ispinger oltre la carette. Per tal modo ei può far comodamente 500 viaggi alla giornata di metri 29,226 per ciascuno, ed altrettanti ritorni.

483. *Scolio I.* Questa è azion mista, giacchè l'operajo tien sollevato un peso, ed insieme spinge orizzontalmente. Per misurarne l'effetto, Coulomb

---

(*) Desaguliers, *Cours de Phys.* Leç IV.

moltiplica i 70 chilogrammi di terra pel cammino per cui vengono trasportati, il quale è di metri 14613, onde viene il prodotto 1022910.

Ma questa non è già, a mio credere, la misura adeguata dell' effetto. Chi strascina un peso per un piano orizzontale, non sente già nè vince la forza del peso, ma sì la forza equivalente all' attrito che dee sormontare. In simil guisa a misurar l' effetto della forza dell' operajo ne' metri 14613 ne' quali tra il peso che regge, e la spinta che esercita, fa una forza di circa chilogrammi 22 convien moltiplicare 14613 per 22, e sarà l' effetto 321486. E poichè ne' ritorni percorre altrettanto spazio facendo una forza di circa chil. 5, 5, sarà l' effetto di questa parte dell' azione = 14613 . 5, 5 = 80371. Riunendo ora i due effetti, sarà il totale effetto dell' azione giornaliera = 401857.

484. *Scolio II.* Fu opinione del celebre Daniello Bernoulli (*) che l' effetto della forza permanente dell' uomo nel lavoro giornaliero abbia una misura a un di presso costante, e non varj molto nè da un individuo all' altro, nè da un genere di lavoro ad un altro. Egli n' esprime la misura media col numero 274771. Ora le grandissime differenze che abbiam trovate fra gli effetti di diverse azioni smentiscono questa conghiettura, risultando palesemente l' effetto dell' azione giornaliera ora maggiore, or di gran lunga minore della misura assegnatane da Bernoulli.

(*) *Prix de l' Acad.,* Tom. VII.

CAP. X.

Del rapporto tra la forza e la velocità.

485. Sia g il peso equivalente alla forza che l' uomo esercita stando fermo; e sia h quella velocità colla quale camminando ei non. è più capace d' alcuno sforzo. Sia poi F il peso equivalente alla forza ch' ei fa, quando cammina equabilmente con velocità v.

Sarà (464) F tal funzione di v. 1.° che scemi al crescer di v; 2.° che quando $v=0$, venga $F=g$; 3.° che quando $v=h$, venga $F=0$.

486. Sulla natura di questa funzione invece di sperienze o d' osservazioni che sole potrebbono insegnarcela, non abbiamo che diverse ipotesi da diversi Scrittori proposte senz'altra raccomandazione che quella della loro semplicità. Son esse le tre che seguono

(*) 1.ª $F=g\left(1-\frac{v}{h}\right)$

(**) 2.ª $F=g\left(1-\frac{v^2}{h^2}\right)$

(***) 3.ª $F=g\left(1-\frac{v}{h}\right)^2$

487. *Coroll. I.* Misurandosi l' effetto della forza permanente (475) dal prodotto Fv, sarà l' espression dell' effetto una delle tre seguenti, secondo che si adotta o l' una, o l' altra delle ipotesi

---

(*) Bouguer, *Man. des vaisseaux*, Liv. I, Sect. 2.

(**) Euler, *Nov. Comm. Petr.*, Tom. III.

(***) *Ibid.*, *ivi*, Tom. VIII.

1.ª $Fh\left(1-\frac{F}{g}\right)$ ovvero $gv\left(1-\frac{v}{h}\right)$

2.ª $Fh\sqrt{\left(1-\frac{F}{g}\right)}$ ovvero $gv\left(1-\frac{v^2}{h^2}\right)$

3.ª $Fh\left(1-\sqrt{\frac{F}{g}}\right)$ ovvero $gv\left(1-\frac{v}{h}\right)^2$

488. *Coroll. II.* Per conoscere qual sia il peso del quale l'uomo dovrà caricarsi, o la velocità che dovrà prendere affin d'ottenere il massimo effetto, si farà $d.\ Fv=0$. Onde avremo

1.° $F=\frac{1}{2}g$; e $v=\frac{1}{2}h$

2.° $F=\frac{2}{3}g$; e $v=\frac{1}{\sqrt{3}}h=0,58\ h$

3.° $F=\frac{4}{9}g$; e $v=\frac{1}{3}h$

489. *Coroll. III.* Ed il valore del massimo effetto sarà

Nella prima ipotesi $=\frac{1}{4}gh$

Nella seconda ipotesi $=\frac{2}{3\sqrt{3}}gh=0,39\ gh$

Nella terza ipotesi $=\frac{4}{27}gh$

490. *Scolio.* Ma qual delle tre ipotesi dovremo prescegliere? e siam noi certi che alcuna d'esse s'accosti alla vera legge della natura? E quand'anche una fra loro potesse tenersi per vera, come determineremo noi per ciascun genere di lavoro permanente i valori de' coefficienti g, h? Eulero assunse $g=$ chil. 34; $h=$ metr. 1,95; ma questa è determinazione affatto precaria.

Ridotti sinora a troppo vaghe e mal sicure notizie seguiamo almeno la traccia che potrà condurci ad acquistarne, quando che sia, delle più certe. Gioverebbe a tal uopo che in ciascuno de' lavori ne' quali più importa il conoscere la forza dell' uomo, s' istituisse una serie d' osservazioni al modo e colle cautele notate nel Capo precedente, paragonando fra loro quei casi ne' quali gli operaj sollevano pesi differenti, e notando per ciascun peso il grado di velocità che prendono naturalmente e l' effetto che se ne ottiene. Questa serie ne farebbe scoprire la forma della funzione ch' esprime la forza per la velocità, e poche sperienze della serie servirebbono a determinare i coefficienti costanti. Sommo utile apporterebbe alla Meccanica una tale scoperta, della quale dipende l' impiegare col maggior vantaggio possibile le forze degli agenti animati.

CAP. XI.

Della forza delle bestie.

491. Se poco sappiam di preciso sulla forza dell'uomo, egli è ancor meno quello che abbiamo circa la forza delle bestie da tiro o da soma, il che in tanta facilità di raccoglier su questo punto degli utili lumi, ed in tanta importauza dell' argomento per la direzione de' lavori meccanici, può parere assai strano. Pochissimo sarà pertanto quello che qui potrem dirne.

492. *Sperienza.* Esplorata col dinamometro (472) la forza assoluta di varj cavalli di mezzana taglia

nel tirare orizzontalmente, ne dedusse Regnier il valor medio, che risultò da chil. 350.

493. *Scolio I.* È dunque in questo genere d'azione la forza assoluta del cavallo settupla di quella dell'uomo. Non è già così nel portar pesi; nè potrebbe il cavallo reggere ad un carico sette volte maggiore di quello d'un facchino.

494. *Scolio II.* Circa poi la forza permanente del cavallo nel tiro, crede Sauveur ch'ei possa lavorare ott' ore al giorno, esercitando una forza di chilogrammi 85,66 con velocità di metri 0,97 per secondo: onde l'effetto verrebbe (475) espresso pel numero 2392998. Più verisimile è la stima di Smeaton che riduce quest' effetto a 1716201. E quanto al portar carichi, stimasi che portar possa chil. 97,9 per metri 38980; onde l'effetto sarebbe 3816142. Ma non so quanto possiamo affidarci in queste misure, che sembrano a dir vero eccedenti per un' opera continuata a più giorni.

495. *Scolio III.* Abbiamo infatti un' osservazione di Hachette (*) della quale la forza permanente del cavallo nel tiro ci comparisce di gran lunga minore. Egli osservò lungamente l'azione d'un cavallo che s'impiegava nel meccanismo seguente. Il cavallo conduce in giro una ruota o timpano orizzontale che per via d'una corda che gli si avviluppa attorno, trae un secchio d'acqua da un pozzo. Il pozzo è profondo metri 32,5; il secchio tiene 90 pinte d'acqua, e pesa tutto compreso 100 chilogrammi. Ad ogni minuto viene sollevato un secchio

(*) *Traité des machines*, pag. 12.

La durata del travaglio varia da un giorno all'altro secondo l' occorrenze; ma per un termine medio di lavoro continuo si può stimare di ore cinque. Così l' effetto utile sarà = 100. 32,5. 300 = 975000.

496. *Scolio IV.* Vagliono ancor per la forza delle bestie quelle osservazioni che abbiam fatte sulla forza dell' uomo in rapporto alla sua velocità, e sul modo di cercarne la precisa ed adegüata misura. E sarebbe a desiderare che l' utilità dell' argomento invogliasse coloro che soprintendono ai grandi lavori meccanici a dirigere verso questo scopo le loro ricerche.

CAP. XII.

Dell' Attrito.

497. A compiere la trattazione delle forze attive rimarrebbe a parlare di quelle che si traggono dall'urto dell'acqua o del vento: ma la misura di queste appartiene all' Idraulica. Passando alle forze passive e resistenti, cioè a quelle che non tanto vagliono ad indurre il moto, quanto ad impedirlo, tralasceremo per la stessa ragione di parlare della resistenza de' mezzi fluidi, restringendoci a quelle che provengono dall' attrito, dalla rigidezza delle funi, e della tenacità de' solidi.

498. Tre specie d' attrito si distinguono dai meccanici, o piuttosto in tre diverse maniere di moto si considera e si misura l' attrito. E sono 1.° quello d' un corpo che striscia radendo un piano; 2.° quello d' un cilindro che ruzzola sul piano; 3.° quello

dell' asse d' una ruota o d' una carrucola; o giri l' asse, o giri il cerchio attorno il medesimo.

499. Gli elementi che ponno influir sull' attrito sono 1.° la pressione di cui il corpo grava la superficie sulla quale cammina; 2.° la scabrosità delle superficie che scambievolmente soffregansi, dipendente dalla diversa loro natura e preparazione; 3.° la durata del loro scambievole contatto; 4.° l'estensione delle medesime; 5.° la velocità del moto. Sull' influenza di ciascuno di questi elementi la sola sperienza può illuminarci.

500. Ma qui pure non possiam troppo fidarci delle prove fatte in piccolo, nelle quali l' operazion dell' attrito può venir mascherata da quella di accidentali ed estranee cagioni che per avventura vi si aggiungano. Ora due celebri sperimentatori Coulomb e Ximenes (*) con lunga serie di sperienze in grande hanno contemporaneamente cercato la misura e le varietà dell' attrito. I loro risultati per lo più concordi spargono molta luce su quest' argomento. Se non che Coulomb avendo maggiormente variate le sue prove, ha potuto avvertire la notabile influenza di alcuni elementi inosservati a Ximenes, ond' è rimasta nelle sperienze di quest' ultimo qualche irregolarità. Da questi dunque e specialmente dal primo trarremo noi le sperienze dell' attrito, cominciando da quello della prima specie.

(*) Coulomb, *Mém. presentées à l'Acad.*, Tom. X.
Ximenes, *Teoria e pratica delle resistenze de' solidi ne' loro attriti*. Pisa 1782.

Queste sperienze sono di due maniere. Per le prime si misura l' attrito, quando le due superficie posavano ferme l' una sull' altra, e si vuole staccarle dal mutuo contatto. Per le seconde si misura l' attrito, quando l' una superficie scorre sull' altra con velocità qualunque.

501. *Sperienza I.* Il tribometro che per questa sperienza adoprarono Coulomb e Ximenes è sostanzialmente lo stesso. Sopra una lunga tavola orizzontale di legno posa una zattera pur di legno che si aggrava di varj pesi. La zattera vien tratta orizzontalmente da una flessibile funicella, che passando per una girella mobilissima porta appeso un piatto sul quale si vanno aggiungendo de' pesi, finchè si giunga a quello che basta a spossare la zattera, e questo peso è la misura dell' attrito. Si varia a piacere la qualità e l' ampiezza delle superficie soggette al fregamento, coll' inchiodare o sulla tavola, o sotto il fondo della zattera delle lastre di varia natura e grandezza. Or ne' seguenti Corollarj riferiremo i risultati delle sperienze.

502. *Coroll. I.* In pari circostanze l' attrito è proporzionale alle pressione. Sia la pressione $= Q$, potrà l' attrito esprimersi per fQ, essendo f un coefficiente invariabile nelle diverse pressioni.

Se non che e dagli esperimenti di Coulomb, e meglio da quelli di Ximenes pare che il coefficiente f scemi alcun poco nelle grandi pressiont. Tuttavia la differenza è piccola, e per lo più può trascurarsi con sicurezza.

503. *Coroll. II.* Varia l'attrito secondo la qualità delle superficie. Fra legni nuovi, abbenchè piallati,

egli val circa la metà della pressione; fra metalli $\frac{1}{4}$; fra legni e metalli $\frac{1}{5}$.

Quando le superficie son logore per lungo fregamento, l'attrito si fa minore. Così ne' legni dalla metà del peso riducesi ad un terzo. L' attrito fra legni riesce anche molto minore quando le fibre s' incontrano ad angolo retto, per la qual circostanza il fregamento riducesi ad un quarto della pressione.

504. *Coroll. III.* Spalmando le superficie con materia untuosa si ottiene un considerabil vantaggio, e tanto più quanto l' unto ha più consistenza. Così l' unto di sego fresco scema il fregamento circa per metà.

E quand' anche l' unto non si rinnovi, finchè resta nelle superficie alcun poco della vecchia untuosità; dura tuttavia il vantaggio, potendo considerarsi l' attrito delle superficie untuose siccome medio fra quello delle superficie asciutte, e quello delle superficie di fresco spalmate.

505. *Scolio IV.* Varia l' attrito secondo la durata del contatto, e cresce per un certo tempo sinchè giunge al suo valor massimo e costante. Questo tempo è d' un minuto o due ne' legni; brevissimo ed impercettibile ne' metalli; ma ne' legni sovrapposti a metalli dura parecchi giorni. Si prolunga molto coll' ungere le superficie. Generalmente è maggiore quando le superficie sono estese, e quando sono eterogenee.

506. *Scolio I.* Per questa circostanza non avvertita da Ximenes è corsa nelle sue sperienze qualche

irregolarità. Non aspettando egli il massimo accrescimento dell' attrito, dovea per lo più riuscirgli minore di quel che trovasse Coulomb. Così fu infatti, e la diversità appunto si palesa maggiore in tutti gli attriti fra legni e metalli, e in que' casi dove interviene untuosità. Allo stesso modo si spiega qualche discrepanza che incontrasi ne' risultati di Ximenes paragonati fra loro: potendo essa nascere dal più o men tempo del precedente contatto.

507. *Coroll. V.* L'attrito poco o nulla dipende dall' ampiezza delle superficie. Ben è vero che quando la pressione è piccola, e la superficie molto estesa, la resistenza trovasi alquanto maggiore, massime se si frapponga intonaco untuoso: ma quest' aumento molto irregolare ed incostante nasce probabilmente dalla coesione.

508. *Scolio II.* Havvi un altro modo (*) di ricercare il coefficiente f dell' attrito per un dato corpo. E questo consiste nel trovare per esperienza quel più ripido piano su cui quel corpo possa per se medesimo sostenersi. Declini questo piano dalla verticale coll' angolo m; sarà $f = \cot. m$. In fatti il corpo tende a scendere con forza $= g \cos. m$, e preme il piano con forza $= g \sin. m$. È dunque l' attrito $= f g \sin. m$. E poichè esso equilibra la forza che il corpo fa per discendere, sarà

$$f g \sin. m = g \cos. m \text{ ; o sia } f = \cot. m.$$

Così essendosi trovato (**) che i mattoni si so-

(*) Bulfinger, *Comm. Petrop.* Tom. II.

(**) Perronet, *Mém. de l' Acad.* 1769.

stengono su d' un piano mediocremente liscio, purchè declini dalla verticale gradi 50, sarà pei mattoni $f = 0{,}8$ circa.

Le terre smosse non si sostengono a piombo, e prendono naturalmente un declivio dalla verticale di gr. 60 se sono terre sabbiose e sciolte, di gr. 54 se sono terre forti. Adunque per l' attrito delle terre fra loro il valore di f starà fra 0,58 e 0,73.

509. *Sperienza II.* Per questa sperienza adopra Coulomb lo stesso tribometro: se non che il piatto che porta il peso può scendere per lungo spazio, traendo per altrettanto spazio la zattera. Egli dunque la lascia scorrere tratta dal peso per l' intera lunghezza della tavola; e con un orologio a mezzi secondi confronta il tempo in cui la zattera percorre la prima metà della lunghezza col tempo in cui percorre l' altra metà.

Talora il primo intervallo di tempo riuscì prossimamente doppio del secondo. Allora è facile il dedurne che il moto era uniformemente accelerato. In fatti dicasi $2l$ la lunghezza della tavola; posto il moto uniformemente accelerato, il tempo nel quale viene percorsa la metà l della lunghezza, sarà (210) $t = \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$; ed il tempo nel quale è percorsa l' intera lunghezza $2l$ sarà $t' = \frac{\sqrt{4l}}{\sqrt{g}}$. Quindi il tempo nel quale viene percorsa la seconda metà della lunghezza sarà $t' - t = \frac{\sqrt{4l} - \sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$. Adunque i tempi t, $t' - t$ ne' quali si passano successivamente le due metà della tavola stanno fra di

loro come $\sqrt{2} : \sqrt{4} - \sqrt{2}$, la qual ragione non è gran fatto differente da quella di 2 : 1.

Pertanto quando s' è trovato il primo intervallo di tempo all' incirca doppio del secondo, si doveva conchiudere essere il moto equabilmente accelerato, e quindi l' attrito esser costante ed indipendente dalla velocità. Del paragone degli spazj co' tempi si potea calcolare il valore della forza motrice, e quindi ricavare la misura dell' attrito.

Tal' altra volta trovò che i tempi erano a un dipresso eguali, ed il moto sensibilmente uniforme. Allora è forza conchiudere che l' attrito crescesse col crescere della velocità. L' attrito poi per qual grado di velocità ch' ebbe luogo nell' esperimento, si misura dal peso traente.

Or ecco i risultati che per molte prove s' ottennero.

510. *Coroll. I.* L' attrito de' corpi in moto generalmente parlando è minore di quello che convien superare nel primo distacco dell' uno dall' altro. Non è però uguale in tutti il divario. Ne' legni essendo l' attrito del primo distacco la metà della pressione, l' attrito nel moto continuo non n' è più che l' ottava parte. All' incontro ne' metalli non v' ha sensibil divario fra il primo attrito e il secondo. Bensì fra legni e metalli, nè quali abbiam veduto il primo attrito essere $\frac{1}{5}$ della pressione, il secondo in un moto lento e continuo si riduce ad $\frac{1}{12}$.

511. *Coroll. II.* Ne' legni e molto più ne' metalli l' attrito si mostra costante, ed affatto indipendente

dalla velocità. Non così fra legni e metalli: quivi l' attrito col crescere della velocità s' aumenta sensibilmente, quantunque in una proporzione assai minore.

Ben è vero che quando i legni sono logori per continuato fregamento, e specialmente se il carico è grave e la superficie piccola, la velocità non influisce più tanto sull' attrito.

L' unto di sego fresco altera alcun poco la costanza dell' attrito, e lo fa crescere al crescere della velocità; ma qui pure per poco che la superficie sia usata, e per così dire incallita al soffregamento, la resistenza torna a un dipresso costante: che però può con sicurezza risguardarsi per tale nell' uso pratico.

CAP. XIII.

Seconda specie d' attrito.

215. Sperienza. Sopra due tavolette parallele poste in perfetto piano orizzontale e distanti per qualche spazio si posa un cilindro perpendicolarmente alla loro lunghezza. A questo nell' intervallo delle due tavolette si accavalla un pieghevole spago che porta appesi a' suoi capi due pesi eguali che tengono il cilindro in equilibrio. Allora da una parte si accresce tanto peso quanto si trova bastare per dare e mantenere al cilindro un moto lento e continuo. Questo peso è la misura dell' attrito che il cilindro dee vincere nel ruzzolare sul piano.

Qui può variarsi a piacere il diametro e la materia del cilindro. Volendosi poi variar la pressione, invece d' un solo spago si può accavallarne al cilindro due o più, acconciamente distribuiti.

E per aver più sicuro riscontro di quel pesetto che rompe l' equilibrio, si fanno ad ogni volta due prove, accrescendolo prima da una parte poi dall' altra; e se il divario è piccolo, si sta al valor medio fra i due osservati. La stessa cautela si adopera ancora nelle sperienze che appresso descriveremo.

513. *Coroll. I.* In pari circostanze l' attrito di seconda specie è prossimamente in ragione inversa del diametro del cerchio o cilindro rotante.

514. *Coroll. II.* Varia ancora quest' attrito secondo le diverse materie che formano il cilindro o il piano. Sembra però che l' untuosità non giovi punto a scemarlo.

Rotando un cilindro di guajaco del raggio di m. 0,081 sopra un piano di rovere, risultò dalle sperienze $f = 0{,}006$; e rotando il medesimo sopra un piano d' olmo, si trovò $f = 0{,}010$. Da che si vede essere l' attrito della seconda specie ben piccolo in paragone della prima.

CAP. XIV.

Terza specie d' attrito.

515. Sperienza. Ad una troclea girevole col suo asse entro un cerchio fisso che l' abbraccia si adossa

uno spago pieghevole che si carica ne' suoi capi con pesi fra loro eguali, or più or meno grandi, onde variar la pressione. Poi s'accresce da una parte quel peso che si trova bastare per imprimere alla troclea una rotazione lenta e continua.

Per dedurre da questo peso addizionale la misura dell' attrito è da riflettere che il peso agisce sull' estremità del raggio della troclea, laddove la resistenza dell' attrito si esercita sull' estremità del raggio dell' asse, vale a dire nel contatto fra l' asse e il cerchio. Perciò convien ridurre quel peso ad una forza equivalente, che sia direttamente opposta alla resistenza dell' attrito; al qual fine bisogna (107) aumentarlo in ragione del raggio dell' asse al raggio della troclea; e il valore del peso così aumentato dà la misura dell' attrito.

Tenendo poi dietro alla discesa del peso preponderante, e confrontando il tempo della discesa per la prima metà della lunghezza col tempo della discesa per l' altra meta, si riconosce (509) se l' attrito sia costante, o se cresca insieme colla velocità.

Per ultimo è da avvertire che quando vogliasi crescer molto la pressione, invece d' uno spago è forza adoprare una funicella di canape. Allora la resistenza si accresce per conto della rigidezza della fune, e bisogna correggere il risultato, detraendone il valore di questa resistenza estranea. Come ciò si faccia mostreremo nel Capo seguente. Frattanto ecco i risultati delle sperienze di Coulomb.

516. *Coroll. I.* In pari circostanze trovasi l' attrito prossimamente proporzionale alla pressione; dico prossimamente, perchè qui pure, come sopra (502),

sotto le grandi pressioni l' attrito s' impicolisce alcun poco.

517. *Coroll. II.* Varia l' attrito secondo le materie che forman l' asse e il suo cerchio. Essendo l'asse di ferro, e il cerchio di rame, l' attrito è $\frac{1}{7}$ della pressione; ma quando l' asse ed il cerchio sono di legno, si ha minor fregamento, che è circa $\frac{1}{12}$ della pressione.

518. *Coroll. III.* Qui pure si ottiene gran vantaggio dallo spalmare le superficie. L' unto recente di sego scema l' attrito della metà. Esso poi ricresce a misura che l' untuosità si consuma, ma ciò fa più lentemente che non nell' attrito di prima specie.

519. *Scolio I.* Questo risultato è contraddetto dalle sperienze di Ximenes, che non ebbe sensibil vantaggio dall' ùngere gli assi e i cerchi delle girelle. Ma conviene avvertire ch' ei si valse di grossi canapi, senza tener conto della loro rigidezza. Or dalle dimensioni ch' ei ne dà apparisce che questa rigidezza dovea formare una resistenza di gran lunga superiore a quella che proveniva dall' attrito. I suoi risultati offrono in complesso l' effetto delle due resistenze, ma non somministrano i dati richiesti a misurarle separatamente. Nè possiamo trarne alcuna sicura conseguenza sulle varietà dell' attrito, che delle due resistenze è la più piccola.

520. *Coroll. IV.* L' attrito degli assi non dipende punto dalla velocità: almeno essa v' influisce sì poco, che nella pratica può aversi per nulla.

521. *Scolio II.* Scorgesi che l' attrito degli assi è minore di quello della prima specie. Bossut (*) ne dà per ragione potersi riguardar questa specie d' attrito siccome mista e partecipe dalla prima e dalla seconda. Non so quanto possa valere questa ragione. Nell' attrito di seconda specie il corpo non tocca il piano che in una sola linea, e tosto l' abbandona; ma nell' attrito degli assi del pari che in quello di prima specie, le due superficie strisciano continuamente l' una sull' altra, nè si abbandonano mai, riducendosi tutta la differenza al farsi lo strisciamento in una superficie cilindrica in vece d' una superficie piana. Quel che può render minore l' attrito degli assi a mio parere è piuttosto, che siccome la superficie soffregata è sempre la stessa, e si ricalcano sempre le stesse traccie, così le punte prominenti una volta piegate non deggion più fare quella resistenza che farebbono se si dovessero piegare altra volta: onde nella continuazione del moto par bene che l' attrito deggia risultarne minore, siccome di fatto lo troviamo.

CAP. XV.

Della rigidezza de' canapi.

522. Per ben intendere onde provenga questa resistenza immaginiamo una forza che sollevi un peso traendo una fune addossata ad una troclea, o ad un

(*) Bossut, *Mechan.*, § 308.

cilindro. Se la fune non è perfettamente pieghevole, avviene nel tirarla che rimane per qualche tratto discosta dalla superficie del cilindro, allontanando così il peso dell' asse di rotazione, e facendo crescere il suo momento, cosicchè ci vuole per questo conto una forza alquanto maggiore per sollevarlo. Questa forza addizionale vince e misura la resistenza proveniente dalla rigidezza. Essa può variare 1.° secondo la tensione della fune, o sia il peso ond' essa è gravata; 2.° secondo la sua diversa qualità, fabbrica e preparazione; 3.° secondo la sua grossezza; 4.° secondo il raggio della troclea o cilindro attorno del quale deve piegarsi. Quanto vaglia ciascuno di questi elementi colla scorta della sperienza ricercheremo.

523. *Sperienza.* In due diversi modi sperimentò Coulomb la rigidezza de' canapi, e n' ebbe risultati in tutto concordi. Il modo più semplice è quello stesso che fu descritto all' art. 512, se non che in vece di spigo si adopera un canapo più o men grosso. Da quel peso poi che rompendo l' equilibrio imprime e mantiene nel cilindro un moto lento e continuo, convien detrarne quella parte che vince l' attrito di seconda specie; il resto vince e misura la resistenza del canapo.

524. *Coroll. I.* Variandosi il peso che tende la fune, e tutte l' altre circostanze restando pari, la rigidezza della fune per una parte è costante, per l' altra è proporzionale alla tensione. Cosicchè può esprimersi per la formola $\mu + \nu Q$, essendo Q il peso tendente.

525. *Coroll. II.* Varia la rigidezza, e quindi va-

riano i coefficienti μ, ν seconda la diversa qualità, fabbrica e preparazione delle funi. Il che abbraccia una diversità presso che infinita, specialmente attesi i molti elementi che concorrono a diversificare la fabbrica delle corde di canape. Generalmente può dirsi che le funi sono più rigide quanto più sono nuove e più attorte. Le funi impeciate sono più rigide delle bianche.

526. *Coroll. III.* Variando il raggio della fune, o la sua circonferenza, varia la rigidezza non già in proporzione del raggio siccome prima supponevasi, ma in maggior proporzione. Essa è come una potenza k del raggio o della circonferenza, essendo l' esponente k maggior dell' unità, ma diverso nelle varie qualità di fune. Nelle funi nuove, e nelle funi impeciate può assumersi $k = 1,7$; nelle funi molto usate $k = 1,4$.

527. *Coroll. IV.* Variando il raggio della troclea o del cilindro su cui s' avvolge la fune, varia la rigidezza in ragione inversa del raggio.

528. *Coroll. V.* Ecco i valori de' coefficienti μ, ν per due funi l' una bianca, l' altra tinta di pece, della circonferenza di metri 0,0632, ed avvilupate a un cilindro del raggio di metri 0,0541

Per la fune bianca

$\mu =$ chil. 2,06 ; $\nu = 0,090$

Per la fune impeciata

$\mu =$ chil. 3,23 ; $\nu = 0,116$

Di qui si può prender norma per valutare a un dipresso questa resistenza in ogni altro caso.

529. *Scolio.* Può nascer dubbio se la resistenza proveniente dalla rigidezza delle funi sia costante,

oppur se cresca insieme colla velocità. A rimover questo dubbio osservò Coulomb che se nella sperienza dell' art. 422 invece d' uno spago ei v' adoprava una fune, la discesa del peso preponderante era tuttavia equabilmente accelerata, e però la resistenza era costante. Or questa resistenza ha due parti, l' una procedente dall' attrito, l' altra dalla rigidezza del canapo. La prima di queste (520) è costante, dunque lo è ancor la seconda.

CAP. XIV.

Resistenza assoluta de' solidi.

530. Un vincolo tenace stringe fra loro le particelle de' corpi solidi, opponendo gagliarda resistenza alla forza che tenti di separarle. Ognun vede che questa resistenza dee variare non solo nelle diverse specie di solidi, ma ben anche secondo le varie loro dimensioni, e secondo il vario modo col quale la forza s' applica a tentar la rottura. Se tutti i solidi fossero perfettamente omogenei ed inflessibili, la resistenza d' ogni sezione potrebbe riguardarsi come la risultante di tante forze eguali e parallele quanti sono gli elementi eguali della sezione, onde sarebbe proporzionale all' area della sezione, e raccolta nel di lei centro di gravità. Allora tutte le varietà dipendenti dalle dimensioni del solido, e dal modo di applicazione della forza, potrebbono geometricamente determinarsi. Or quantunque mai non s' incontri questa perfetta ed uguale rigidità delle

fibre, pur gioverà di assumerla siccome ipotesi, e vedere, dietro la scorta del Galileo (*), quali conseguenze ne derivino. Consulteranno poscia l' esperienza, e il confronto de' risultati ci mostrerà quanto all' eterogeneità delle parti, e quanto all' imperfetta loro elasticità debbasi attribuire.

531. Sia un solido prismatico (Fig. 39) fitto nel muro da una sua estremità, e nell' altra estremità gravato d' un peso che stia per romperlo nella sezione $MRSN$, cosicchè sia equilibrio tra quel peso e la resistenza del solido. Prendesi questo peso a misura della resistenza.

Se il peso trae normalmente alla sezione $MRSN$, siccome fa il peso P, tendendo a svellare il solido, dicesi la *resistenza assoluta*: se trae parallelamente alla sezione $MRSN$, siccome fa il peso Q, tendendo a rompere il solido per traverso, dicesi la *resistenza rispettiva*.

532. *Proposizione*. Esprima il coefficiente k la tenacità di ciascun elemento della sezione $MRSN$; e riferita quella sezione all' asse AD, intorno cui la supporremo simmetrica, sia x l' ascissa, y l' ordinata d' un punto qualunque del suo perimetro. La resistenza assoluta di quella sezione, o sia il peso P che le fa equilibrio, esprimerassi così

$$P = 2k\int y\,dx.$$

Sarà infatti il trapezio elementare $efgh = 2y\,dx$, e la sua tenacità $= 2ky\,dx$. Quindi la risultante (530) o sia la tenacità totale dell' area $MRSN$, cui dev'essere eguale ed opposta la forza P, sarà $= 2k\int y\,dx$.

(*) Galileo, *Op.*, Tom. III, pag. 66 e segg.

533. *Coroll. I.* Adunque ne' solidi omogenei la resistenza assoluta è proporzionale alle loro sezioni perpendicolari alla forza distraente.

534. *Sperienza I.* Musschenbroek (*) cimentò la resistenza assoluta di varj solidi col seguente artificio. Fermatane saldamente l' estremità inferiore, legava l' altra estremità al braccio più corto d' una stadera. Poi nel braccio più lungo andava scostando il marco, e così accresceva gradatamente la forza tendente a sollevar l' altro braccio, ed a schiantare il solido. Notava il segno ov' era giunto il marco al momento della rottura, e da ciò conosceva la forza richiesta a superare la tenacità.

Fece così molte prove specialmente su varie specie di legni, e sopra corde metalliche di diversa natura e grossezza. Altri poscia ne han fatto sulla resistenza d' alcune pietre, e de' cementi. Noi succintamente esporremo i più notabili risultati.

535. *Coroll. I.* Ne' corpi della stessa materia dovrebbono le resistenze variare in proporzione delle sezioni trasversali; or ne' metalli deviarono da questa legge, non però gran fatto, ed ora in un senso, ora in senso opposto. Ne' legni l'aberrazione fu maggiore ed affatto irregolare.

Egli è palese che queste anomalie provengono da diffetto d' omogeneità; forse scomparirebbono, se le sperienze si eseguissero in grande; ma tali prove in grande sono estremamente difficili a motivo delle forze enormi che richieggono.

(*) *Introductio ad cohœrentiam corporum firmorum* 1729.

536. *Coroll. II.* Tra i metalli dopo l' oro il più resistente è il ferro; vengono appresso l' argento e l' ottone, metalli d' uguale tenacità; segue il ramo; debolissimi sono lo stagno ed il piombo. Il rapporto delle tenacità è a un dipresso il seguente

Oro	1110
Ferro	1000
Argento ed Ottone . .	820
Rame	665
Stagno	110
Piombo	65

Giusta alcune prove del Sig. di Rumford un centimetro quadro di buon ferro lavorato sostiene chilogrammi 4470; di qui si può aver norma per gli altri metalli.

Per simli prove la tenacità di varie specie di macigni apparve di chil. 13,36 per ogni centimetro quadro di superficie; e quella de' mattoni di chil. 18,7 Fu provata anche la resistenza de' cementi, ma questa dev' essere, e si trova infatti assai varia: quindi non è a stupire se riuscì a Coulomb di chil. 3,34, mentre Delanges non la trovò che di chil. 0,67.

537. *Sperienza II.* Con apparato non dissimile dal precedente investigò Duhamel (*) la forza richiesta a strappare grosse funi di canape. Era ben da aspettarvi molta varietà, poichè oltre le qualità diverse della canape, tutte le circostanze della fabbricazione influiscono grandemente sulla sua forza. Le osservazioni principali furon queste.

(*) *Art de la Corderie.*

538. *Coroll. I.* Nelle funi dello stesso filo, e fabbricate allo stesso modo, trovasi la forza proporzionale alla sezione, conforme alla teoria.

Ma nelle funi di fabbrica diversa non si può prender norma dalle sezioni, poichè la commessura più o meno stretta de' fili, o delle treccie induce molta varietà. Più giustamente si trova la forza proporzionale al peso della fune sotto eguale lunghezza, al quale peso e proporzionale il numero degli elementi che colla loro tenacità contrastano allo strappamento. Ciò deve intendersi, quando la qualità del filo, e il grado dell' attorcimento sia lo stesso in ambe le funi.

539. *Coroll. II.* Per le funi di buon canape, attorte secondo la pratica comune, vale a dire coll' accorciamento d' un terzo, in varie prove la resistenza assoluta riuscì di chil. 520 per ogni centimetro quadrato di sezione.

Ma questo valore è soggetto a molte varietà. Sopra tutto v' influisce il grado d' attorcimento, il quale quanto è maggiore, tanto più indebolisce la fune. Trova Duhamel che torcendo meno le funi, cosicchè restino scorciate soltanto d' un quarto invece del terzo, la forza s' aumenta nel rapporto di 2 : 3. Ha trovato ancora che le funi imbevute di pece son più deboli delle bianche, e le bagnate più deboli delle asciutte.

CAP. XVII.

Resistenza rispettiva de' solidi.

540. *Proposizione.* Ritenute le denominazioni precedenti, sia la lunghezza del solido $AC = c$; la resistenza rispettiva della sezione $MRSN$, o sia il peso Q che le fa equilibrio esprimerassi così

$$Q = \frac{2k}{c} \int xy\,dx.$$

Il peso Q tende a spezzare il solido nella sezione $MRSN$ facendola girare attorno il confine infimo RS, ed agisce col momento Qc. Ora la tenacità del trapezio elementare $efgh$ la qual è $= 2ky\,dx$ resiste a questo sforzo col momento $= 2kxy\,dx$; onde la somma de' momenti per tutta la sezione sarà $= 2k\int xy\,dx$. Ma per l'equilibrio questa somma dev' essere uguale (108) al momento del peso. Dunque ec.

541. *Coroll. I.* Abbia il solido la forma d'un parallelepipedo, come soglion esser le travi, e siane l'altezza $AD = a$, la larghezza $MN = b$, la lunghezza $AC = c$. Riuscirà $Q = \frac{a^2bk}{2c}$; onde le resistenze rispettive de' travi sono in ragion composta delle larghezze, de' quadrati delle altezze, e dell' inversa delle lunghezze.

542. *Coroll. II.* Il rapporto della resistenza assoluta alla rispettiva è il seguente

$$P : Q :: c\int y\,dx : \int xy\,dx$$

onde nelle travi la resistenza assoluta è alla rispettiva come la lunghezza alla metà dell' altezza.

543. *Coroll. III.* Insieme col peso Q anche il peso proprio del solido tende a spezzar la sezione $MRSN$. Volendosi tener conto di questo peso, che chiamerò V, s' intenda applicato al centro di gravità del solido, o sia alla metà della lunghezza. Agisce dunque col momento $\frac{1}{2} V c$. Quindi l' equazione dell' equilibrio sarà

$$Q + \frac{1}{2} V = \frac{2k}{c} \int x y \, d x.$$

544. *Scolio I.* Abbandonando l' ipotesi Galileana dell' assoluta rigidezza delle fibre, propose Leibnizio (*) un' altra ipotesi che sembra convenir meglio ai corpi tessuti di fibre flessibili, e capaci d' allungarsi per lo stiramento. Allorchè il peso Q fa forza per girar la sezione attorno il lato infimo RS, gli elementi congiunti a questo lato non soffrono distrazione alcuna, gli altri sono più e più distratti secondo la loro distanza da RS. La resistenza loro, secondo Leibnizio, è proporzionale alla distrazione che soffrono: onde è posta $= k$ la resistenza nel lato superiore MBN, la resistenza nel lato ef sarà $= \frac{kx}{a}$. Perciò il trapezio elementare $efgh$ resisterà col momento $\frac{2k}{a} . x^2 y \, d x$. Eguagliando, come prima, la somma de' momenti al momento $Q c$ del

(*) *Acta Erud.* Lips. 1684.

peso, trovasi in quest' ipotesi

$$Q = \frac{2k}{ac}\int x^2 y\, dx.$$

Quindi il rapporto della resistenza assoluta alla rispettiva riesce

$$P : Q :: ac \int y\, dx : \int x^2 y\, dx$$

cioè nelle travi come la lunghezza ad un terzo dell' altezza.

Sussiste però anche in quest' ipotesi fra le resistenze rispettive di due travi la proporzione assegnata all' art. 541.

545. *Scolio II.* Taluno esprime la resistenza nel lato ef semplicemente per kx, e così trova pei travi parallelepipedi $Q = \frac{a^3 bk}{3c}$; onde la resistenza loro varierebbe in ragione non più de' quadrati, ma bensì de' cubi delle altezze.

Ma si avverta che esprimendo la resistenza o sia la distrazione in ef per kx, si dovrebbe esprimere la distrazione nel supremo lato MN per ka; onde questa distrazione non avrebbe valor fisso, ma potrebbe crescere con a indefinitamente; il che non può ammettersi. Nello stato prossimo alla rottura egli è palese che la distrazion massima, la quale ha luogo in MN, deve precisamente essere uguale a quel maggiore allungamento che comportano le fibre del solido prima di strapparsi. E però la resistenza in ogni punto del lato MN non può farsi nè maggiore nè minore dalla resistenza assoluta, o sia della tenacità k.

546. *Scolio III.* Ammessa l' ipotesi Leibniziana il solido deve incurvarsi alcun poco pria che si rompa.

La figura che esso prende nello stato prossimo alla rottura è quella stessa d' una lastra elastica incurvata da un peso.

Sia $ABCD$ (Fig. 40) il profilo del solido, e questo per il carico del peso Q si sia piegato in $ABdc$. Riferiamo la curva Amc all' asse AP colle coordinate $AP = x'$, $Pm = y'$, conservando altronde le primiere denominazioni. Sia il punto n prossimo al punto m, e le sezioni mh, nk fatte normalmente alla curva Amc concorrano in K. Sarà $Kn = Km = R$ il raggio osculatore della curva nel punto m.

Ora consideriamo l' equilibrio del peso Q colla tenacità nella sezione mh, la quale dalla situazione mi parallela ad nk è condotta alla situazione mh per lo stiramento delle fibre. Mentre il peso Q tende a far girare la sezione mh intorno al punto m scostandola sempre più dalla situazione mi, e così strappando le fibre già allungate del solido, ognuna di queste fibre resiste con forza tanto maggiore (secondo Leibnizio) quanto è maggiore la sua distrazione. Quindi nel punto e sarà la resistenza proporzionale ad eq; e perchè sta $Kn : nm :: me : eq$, se prendiamo per costante l' archetto nm della curva, sarà eq proporzionale ad $\frac{me}{Kn}$, ossia ad $\frac{x}{R}$. Pertanto se chiamiamo $\frac{h}{R}$ la resistenza nel punto i dove è $x = a$, sarà la resistenza nel punto e, $= \frac{hx}{aR}$.

Per ciò la resistenza del trapezio elementare corrispondente al punto e sarà $\frac{hx}{aR} \cdot 2y\,dx$; e il

momento di essa rispetto della rotazione attorno il punto m sarà $\frac{hx}{nR}.2xydx$; ed in fine la somma de' momenti per tutta l' estesa della sezione mh sarà $\frac{2h}{aR}\int x^2 y\, dx$.

Notiamo ora come la quantità $\frac{2h}{a}\int x^2 y dx$ è costante per tutta la curva, mentre il solido si suppone prismatico avente tutte le sue sezioni uguali e simili, onde l' integral definito $\int x^2 y\, dx$ è il medesimo per tutte le sezioni. Mettendo dunque in luogo di questa costante il simbolo E, sarà $\frac{E}{R}$ il momento della resistenza.

Dall' altra parte il momento del peso Q riferito al punto m sopra cui tende a farsi la rotazione è $= Q(c-y')$. Dunque dev'essere $\frac{E}{R} = Q(c-y')$. Ma questa è per l' appunto (197) l' equazione della lastra elastica piegata da un peso. Dunque ec.

347. *Sperienza.* Con piccoli prismi di legno affatto simili a quelli de' quali aveva esprimentata la resistenza assoluta, ne esplorò Musschenbroek la resistenza rispettiva, stringendo uno de' loro capi con forte staffa di ferro, indi aggravando l' altro capo sintanto che il peso arrivasse a spezzarli. Potè così far paragone delle due resistenze; e variando le dimensioni de' prismi, potè ancora paragonare le resistenze rispettive fra loro. Sottopose a simili prove alcuni cilindretti di vetro.

348. *Coroll. I.* Nel vetro la proporzione della re-

sistenza assoluta alla rispettiva riuscì conforme all' ipotesi Galileana (542); ma ne' legni aberrò stranamente non meno da quell' ipotesi che dall' altra di Leibnizio (544) nè parve potersi ridurre ad alcuna regola certa, tanto ne' diversi legni fu varia.

Ciò non recherà maraviglia a chi osservi che le fibre del legno non sono nè tutte rigide come le suppose Galileo, nè tutte egualmente flessibili come le suppose Leibnizio. Quindi non sì tosto il peso Q comincia a forzare il solido che parte delle fibre si strappa, mentre le altre tuttavia resistono; e ne resta diminuita la resistenza della sezione in ragione del numero e della positura delle fibre strappate. Nel che può essere incostanza e varietà grandissima.

549. *Coroll. II.* Quanto al paragone delle resistenze rispettive de' solidi parallelepipedi, esse riuscirono proporzionali alle larghezze, ed a' quadrati delle altezze, consentendo in ciò colla Teoria. Come variassero nelle diverse lunghezze, non fu esaminato; ma le sperienze che riferiremo nel Capo seguente suppliranno a questa mancanza.

CAP. XVIII.

Resistenza de' solidi sostenuti nelle estremità.

550. *Proposizione.* Intendiamo il medesimo solido (Fig. 39) posto sopra due appoggi immobili, che sostengano le sezioni estreme $MRSN$, $M'R'S'N'$. E dal punto di mezzo E penda il peso T che sia sullo spezzare il solido nella sezione $mrsn$. La resi-

stenza del solido, ossia il peso T che l' equilibra esprimerassi così

$$T = \frac{8k}{c} \int x y \, d x.$$

Ciascheduno degli appoggi sostiene la metà del peso T; perciò sussisterà l' equilibrio, se rimossi i due appoggi intenderemo sostituire ad essi due forze ciascuna eguale alla metà di T, che traendo all'insù tenderanno a rompere il solido nella sezione di mezzo $m\, r\, s\, n$. Il momento di ciascuna di queste forze sarà $\frac{1}{2} T . \frac{1}{2} c$ o sia $\frac{1}{4} T c$. Questo momento dev' essere eguale al momento della resistenza, che è (540) $2 k \int x y \, d x$. Dunque ec.

551. *Coroll. I.* È dunque $T = 4 Q$; onde un solido sostenuto nelle estremità può portar quadruplo peso di quello che porterebbe quando fosse fitto nel numero da una sola banda; e questo peso quando si tratta di travi, è proporzionale alla larghezza, al quadrato dell' altezza, ed inversamente alla lunghezza.

552. *Coroll. II.* Se il peso T non pendesse dal mezzo, ma da un altro punto, come H, fatto $A H = z$, ricercando nello stesso modo l' equilibrio del peso colla resistenza della sezione corrispondente al punto H, si troverebbe

$$T = \frac{2 c k}{z (c - z)} \int x y \, d x.$$

Quindi tanto maggior peso può portare il trave, quando più il punto di sospensione H si scosta dal mezzo; variando questo peso in ragione inversa del rettangolo $A H$, $H C$.

553. *Coroll. III.* Se il solido non giace orizzontalmente, si risolverà il peso T in due forze, una perpendicolare alla lunghezza del solido, l'altra secondo essa lunghezza, e si terrà conto soltanto della prima.

554. *Coroll. IV.* Volendosi tener conto anche del peso proprio V del trave, si rifletterà che ognuno degli appoggi ne sostiene la metà; quindi sostituendo agli appoggi un' egual forza volta in senso contrario, scorgesi che questo peso aggirà contro la sezione di mezzo col momento $\frac{1}{2} V c$. Ma siccome contrasta a questo sforzo il peso del mezzo trave chiuso fra le sezioni $MRSN$, $mrsn$, il quale può intendersi applicato al punto di mezzo della loro distanza, e però opera con momento $= \frac{1}{8} V c$; così il momento proveniente dal peso V rimane soltanto $= \frac{1}{8} V c$. Ciò posto l' equazione dell' equilibrio dà

$$T + \frac{1}{2} V = \frac{8k}{c} \int x y h x$$

Basterà dunque aggiungere al carico T la metà del peso del trave.

555. *Coroll. V.* Qui si presenta un facile problema. Giacciano orizzontalmente due travi d' egual sezione, il primo fitto nel muro da una banda, il secondo sostenuto nelle estremità; e sieno entrambi tanto lunghi quanto posson esserlo onde pel proprio peso non rompano. Cercasi il rapporto delle loro lunghezze.

Mediante le formole degli art. 543, 554 sciogliesi agevolmente, e si troverà che il secondo potrà esser lungo il doppio del primo. E così pur conchiuse Galileo, dalla cui sentenza malamente si scoscostarono de la Hire, e Grandi (*).

556. *Sperienza.* Per gran ventura abbiamo su quest' argomento una bella serie di sperienze del Sig. di Buffon (**) su grosse travi di rovere, di sezione quadrata, pesanti chil. 1065 per ogni metro cubo. Queste posate nelle estremità su due saldi appoggi caricava egli a poco a poco nel mezzo, sino a spezzarle.

557. *Coroll. I.* La tavola seguente presenta i risultati medj della sperienza. I pesi cui cedettero le travi sono espressi in chilogrammi; le lunghezze de' travi in metri; i lati della sezione trasversale in decimetri. Al carico addossato alla trave si è aggiunta la metà del peso della trave stessa pel motivo spiegato all' art. 554.

(*) *V.* Mariano Fontana, *Dinamica*, § 328.
(**) *Mém. de l' Acad. de Paris* 1740. 1741.

Lunghezze.	LATI DELLA SEZION QUADRATA				
	4 poll. decim. 1,083	*5 poll. decim.* 1,353	*6 poll. decim.* 1,624	*7 poll. decim.* 1,894	*8 poll. decim.* 2,166
Pie. m.	chil.	chil.	chil.	chil.	
7=2,274	2614	5664	9307		
8 2,598	2243	4815	7636	12802	
9 2,923	1988	4095	6478	10996	
10 3,248	1789	3320	5553	9595	13063
12 3,898	1487	3011	4509	7991	11576
14 4,548		2637	3721	6559	9793
16 5,197		2180	3186	5484	8144
18 5,847		1868	2804	4722	6607
20 6,497		1642	2515	4173	5785
22 7,146		1525			
24 7,796		1134			
28 9,095		958			

558. *Coroll. II.* Secondo la teoria i pesi *T* dovrebbono seguire la ragion composta della duplicata delle altezze, della semplice delle larghezze, e dell'inversa delle lunghezze. E perchè qui la sezione è quadrata, dovrebbono quei pesi essere diretta-

mente come i cubi de' lati delle sezioni, e reciprocamente come le lunghezze. Or dalla prima proporzione non aberran gran fatto; più tosto e più costantemente si allontanano dalla seconda, vedendosi che i pesi T scemano più che non porterebbe l'accrescimento delle lunghezze.

559. *Coroll. III.* Una formola assai semplice che rappresenta i risultati della sperienza con approssimazione sufficiente alla pratica, potrebbe essere la seguente

$$T = 6180^{\text{chil.}} \frac{a^3}{c + 0{,}085\, c^2}$$

ritenendo che le lunghezze c si esprimano in metri, e i lati a in decimetri.

Potrebbe rendersi più esatta col cangiarne la forma o col moltiplicarne i termini, ma le irregolarità che si scoprono nella serie de' risultati mi fanno credere che riuscirebbe assai complicata. Altronde è da riflettere che gli sperimenti di questo genere non comportano molta precisione.

560. *Scolio I.* Molte altre particolarità degnissime d'attenzione furono avvertite da Buffon nel corso delle sue sperienze. La brevità ci obbliga ad accennarne due sole. La prima è che variando spesse volte il peso specifico anche ne' legni della stessa specie, la forza si trova prossimamente proporzionale al peso specifico. La seconda è un'osservazione per cui consiglia di non caricare le travi oltre la metà del peso T: poichè un peso alquanto minore di T se non può spezzarle in breve tempo, ben può piegarle notabilmente, e coll'andar del tempo può romperle.

561. *Scolio II.* Reggerebbe la trave ad un carico assai maggiore, se in vece di posar semplicemente su due sostegni, fosse in ambi gli estremi invincibilmente incastrata nel muro. Poichè allora non può rompere, se non si spezza in tre luoghi ad un tempo. Quanto cresca per questo capo la resistenza non è finora determinato.

Nelle fabbriche non si ommette d' incastrare per tal modo i capi delle travi. Ma per lo più non è da far gran fondamento sul vantaggio di forza che ne ricevono, attesa la poca resistenza, e il facile deterioramento de' cementi.

CAP. XIX.

Resistenza de' solidi alla compressione.

562. Immaginiamo ora un solido prismatico eretto verticalmente sul suolo, su cui saldamente posi in *A B* (Fig. 35), e gravato in cima del peso *S*. Qui se l'omogeneità e la rigidezza delle parti fosse perfetta, l' azion del peso premendo le sezioni del solido l'una contro l'altra ajuterebbe la tenacità anzi che farle contrasto. A spiegar dunque come avvenga di fatto che le colonne sotto gravi pesi s' infrangano, è forza ricorrere a quella flessibilità della quale le fibre de' solidi qual più qual meno partecipano, e richiamare a questo luogo l' ipotesi di Leibnizio. Allora ogni piccol difetto d' omogeneità potrà fare che la colonna cedendo o dall' una parte o dall' altra si curvi conducendosi ad uno stato prossimo

alla rottura. Noi cercheremo, seguendo le traccie d'Eulero (*), le condizioni di questo stato.

563. *Proposizione*. Inflettendosi la colonna prismatica $ABDC$ (Fig. 41) pel carico del sovrapposto peso G, la curvatura AmC che ella avrà nello stato prossimo alla rottura sarà quella stessa d'una lastra elastica piantata verticalmente, e piegata da un peso postovi in cima.

Dim. Facciamo $Cp = x'$, $pm = y'$, e il raggio osculatore in m della curva AmC, o sia $Km = R$. Consideriamo l'equilibrio tra il peso G e la tenacità nella sezione mh, come in altro simile Problema (546) abbiam fatto; e ritroveremo il momento della resistenza essere $= \frac{E}{R}$, dove E è uguale alla quantità $\frac{2h}{a}\int x^2 y\, dx$ costante per tutta la curva. Dall'altra parte il momento del peso è $= G \cdot pm = Gy'$. Quindi l'equazione $\frac{E}{R} = Gy'$, che è per appunto (199) l'equazione della lastra elastica verticale.

564. *Coroll. I*. Di qui si deduce che essendo l'inflessione piccolissima, l'equazione della curva AmC in termini finiti sarà (200)

$$y' = f \sin. x' \sqrt{\frac{G}{E}}$$

dove la costante f rappresenta la lunghezza rs del ventre massimo della colonna inarcata, il qual ventre cadrà (202) nel punto di mezzo della colonna.

(*) *Mém. de l'Acad. de Berlin*. 1757.

565. *Coroll. II.* Si deduce eziandio che per arrivare a piegar la colonna d'una quantità benchè menoma, dovrà essere per lo meno (201) $G = \frac{E \pi^2}{c^2}$. Laonde la formola $\frac{E \pi^2}{c^2}$ potrà aversi per adeguata espressione della resistenza della colonna.

556. *Coroll. III.* Abbia la colonna la forma d'un parallelepipedo, e sia l'altezza $AC = c$, $AB = a$, e l'altra dimensione che non è espressa nella figura, sia $= b$. Avvertasi alla differenza tra queste due dimensioni a, b, delle quali la prima è posta nel piano in cui giace la curvatura della colonna, e la seconda è perpendicolare a quel piano. Ora la sezion trasversale di tal colonna essendo un rettangolo dei lati a, b avremo $\int x^2 y\, dx = \frac{1}{3} a^3 b$, e quindi $E = \frac{1}{3} a^2 b h$. Sostituendo questo valore nella formola $\frac{E \pi^2}{c^2}$ espression generale della resistenza delle colonne, avremo $\frac{a^2 b h \pi^2}{3 c^2}$; e quindi la resistenza è proporzionale al quadrato della dimensione a, alla semplice dimensione b, e reciprocamente al quadrato dell'altezza c della colonna.

Se le sezioni delle colonne che si paragonano fra loro fossero simili, siccome b sarebbe proporzionale ad a così la resistenza riuscirebbe proporzionale ad $\frac{a^3}{c^2}$. E così il peso cui può reggere una colonna cilindrica sarà in ragion composta del cubo del diametro, e dell'inversa del quadrato dell'altezza.

Eulero trova la resistenza proporzionale ad $\frac{a^3 b}{c^2}$, e se le sezioni sono simili ad $\frac{a^4}{c^2}$. Il che proviene da questo, che egli esprime la tenacità d' ogni particella nel modo accennato all' art. 543 (*) il qual modo per la ragione ivi esposta non sembra potersi ammettere.

567. *Sperienza.* Appartiene a questo luogo una serie di sperienze istituite da Musschenbroek con travicelli di varj legni, e di diverse misure, e con alcuni pilastrini di pietra fitti saldamente in una tavola da cui sorgevano verticali. Poneva in cima a ciascun di questi un piano orizzontale che andava gravando di pesi, sinchè il peso giungesse a spezzare il travicello. Ponea cura che il centro di gravità dal sovrapposto peso cadesse sull' asse del travicello diritto, nè cangiasse di luogo nel mentre che questo piegava.

568. *Coroll. I.* I pesi che ruppero i travicelli riuscirono per l' appunto nella ragione di $\frac{a^2 b}{c^2}$; il che consente a maraviglia colla teoria Euleriana modificata così come abbiam fatto nell' articolo precedente.

569. *Coroll. II.* Soggiungeremo alcuni valori de' pesi per cui ressero diversi parallelepipedi lunghi tre decimetri, e di base quadrata del lato d' un centimetro. Un travicello di rovere portò chilogrammi 131; un pilastrino di mattoni, chil. 76; un pilastrino di macigno, chil. 73; uno di marmo, chil. 203.

(*) *V. Nova Acta Petrop.* Tom. II, pag. 131.

LIBRO QUARTO

DELL' EQUILIBRIO DELLE FABBRICHE.

CAP. I.

Nozioni generali.

570. Sorgono verticalmente dal suolo i muri, le colonne, le dighe, ed altre simili moli che forman base alle sovrapposte, o adjacenti parti dell'edificio. Queste basi disegneremo col nome generico di *piediritti*. Le altre parti mentre spingono o premono i piediritti, si spingono ancora e si premono scambievolmente. E se tutte queste azioni si equilibran fra loro, ed insieme colle resistenze provenienti dall' attrito delle superficie, e dalla tenacità de' pezzi solidi e de' cementi, sarà l' edificio *equilibrato*.

571. Ogni fabbrica è un sistema di forze, e l' esame della sua fermezza esige l' applicazione delle condizioni generali d' equilibrio. Ma quest' esame può agevolarsi coll' istituirlo separatamente sopra le diverse parti dell' edificio, purchè possiamo conoscere e valutare le forze che sopra ognuna di esse agiscono. Converrà allora per ciascuna parte osservare quai moti tendano ad imprimervi le forze applicate, e percorrendo ad uno ad uno questi moti, far pa-

ragone tra le forze che tendono ad imprimerli, e quelle che vi resistono.

572. Ora nessuna parte dell' edificio può essere smossa, se non che o per moto progressivo, o per moto rotatorio. Poichè o quella parte è spostata senza cangiare sua forma; ed allora ella è come un sistema di forma invariabile, incapace di concepir moto istantaneo se non è progressivo o rotatorio: oppure viene spostata cangiando insieme sua forma; e questo, atteso il vincolo della tenacità, non può accadere se non collo spezzarsi quella parte nella sezione più debole; il che imprime un moto progressivo se la forza agisce perpendicolarmente alla sezione, ed un moto rotatorio, se essa agisce obbliquamente.

573. Distingueremo col nome di *Spinta* quella forza che tende ad imprimere un dato moto a una data parte della fabbrica; e col nome di *Resistenza* quella forza che tende ad impedirlo. Ora pei moti progressivi si dovrà far paragone fra la *Spinta* e la *Resistenza;* pe' moti rotatorj si dovrà far paragone fra il *Momento della spinta*, ed il *Momento della resistenza*, quali momenti dovranno riferirsi a quell' asse attorno cui il sistema può rivolgersi. Da questo paragone dipende il giudicio dell' equilibrio e della stabilità.

CAP II.

Dell' equilibrio de' piediritti.

574. Per non dipartirci dai casi più sempleci e più usuali supporremo il piediritto simmetrico attorno d' un piano verticale $ABCD$ (Fig. 42) che passi per la direzione della spinta SR. Quivi pure cadrà il centro di gravità del piediritto, e siccome nel medesimo piano agiscono tutte le forze, così in luogo di tutto il solido basterà considerarne questo profilo $ABCD$.

Decomposta la spinta in due forze, l' una P verticale, l' altra Q orizzontale, egli è chiaro che il piediritto non potrà tutto spostarsi se non che o per moto progressivo da B verso A, o per moto rotatorio attorno l' angolo A.

575. *Proposizione.* Trovare la resistenza del piediritto, ed il momento della resistenza.

Al moto progressivo resiste l' attrito. Sia M il peso del piediritto; sarà la pressione sulla base $AB = M + P$; e quindi sarà l' attrito, o sia la cercata resistenza (502) $= f(M + P)$.

Il momento poi della resistenza (573) dee cercarsi relativamente al moto rotatorio. Si cali dal punto G la perpendicolare GX sulla base, e da un punto S preso ad arbitrio sulla direzione della spinta si cali similmente la perpendicolare SE. Sia $AX = k$, $AE = x$, $ES = y$. La spinta orizzontale Q col momento Qy tende a rovesciare il solido

attorno l' angolo A. Resiste a questo sforzo il peso M col momento $M\,k$, e la spinta verticale P col momento $P\,x$. Sarà dunque il total momento della resistenza $= M\,k + P\,x$.

576. *Coroll. I.* Adunque per la stabilità dovrà essere $fM + fP > Q$; $Mk + Px > Qy$.

Se vi fosse uguaglianza fra la spinta e la resistenza, e fra i rispettivi momenti, il piediritto reggerebbe tuttavia, ma ad ogni piccolo accrescimento della spinta vacillerebbe.

577. *Coroll. II.* La seconda condizione si può esprimere e riconoscere anche senza risolvere la spinta nelle due forze P, Q. Si cali dal punto A la normale $A\,Z$ sulla direzione della spinta. Dovrà essere $M\,.\,A\,X > S\,.\,A\,Z$.

Oppure si prolunghi la verticale condotta pel centro G sinchè concorra in I colla direzione della spinta. S' intendano applicate in I le due forze M, S e si compia il parallelogrammo coi lati che le rappresentano. La diagonale prolungata dovrà cader sulla base di qua dal punto A verso B.

578. *Coroll. III.* Sia il piediritto un muro rettangolare e siane l' altezza $B\,C = a$, la grossezza $A\,B = b$, il peso specifico $= G$. Sarà $M = a\,b\,G$, e $k = \frac{1}{2}\,b$. Perciò se il muro sostenga soltanto una spinta orizzontale Q, sarà la resistenza $= a\,b\,f\,G$; ed il momento della resistenza $= \frac{1}{2}\,a\,b^2\,G$.

Quindi ingrossando un muro rettangolare, la sua resistenza contro una spinta orizzontale s' accresce in ragione della grossezza, e il momento della resistenza in ragion duplicata della grossezza.

579. *Coroll. IV.* Dichiariamo coll' esempio l' applicazione di questa teoria alla pratica. Un muro alto metri 12, e del peso specifico 2000 deve reggere ad una spinta orizzontale di chilogrammi 4500 che si esercita verso la sommità. Cercasi la grossezza che gli conviene per l' equilibrio.

Qui fa d' uopo avvertire 1.° che prendendo il metro per unità delle misure lineari, il peso specifico 2000 denota che un metro cubo del materiale ond' è composto il muro pesa chil. 2000; e così il prodotto $a\, b\, G$ indicherà il peso del muro sulla lunghezza d' un metro; 2.° che, similmente dicendosi che la spinta orizzontale vale chil. 4500, vuolsi intendere la spinta esercitata sull' unità di lunghezza, vale a dire sulla lunghezza d' un metro; 3.° che il coefficiente f dell' attrito può farsi (508) $= 0{,}8$; noi però a sicurezza maggiore faremo solamente $f = 0{,}75$.

Ora le due equazioni dell' equilibrio qui sono

$$a\, b f G = Q \; ; \quad a\, b^2\, G = 2\, Q y$$

ove introdotti i valori numerici avremo dalla prima $b = 0{,}25$; e dalla seconda $b = 2{,}12$.

Basterebbe dunque al muro la grossezza di 25 centimetri per non essere spostato orizzontalmente; ma perchè non rovesci al di fuori esige per lo meno grossezza di metri 2,12.

Questa grossezza 2,12 richiesta pel puro equilibrio non parrà sufficiente (576) ad assicurare la stabilità. Dee però riflettersi che non avendo noi messa in conto la tenacità che lega il muro alla base, abbiam fatto la sua resistenza minore di quella ch' è realmente: onde coll' assegnata grossezza di

2,12 potrà benissimo sostenere una spinta superiore ai chil. 4500. Pur gioverà crescerne alquanto la grossezza ad abbondante cautela.

580. *Scolio*. Sin qui abbiam considerato il piediritto come un solido di forma invariabile, da non potere spostarsi che tutto d' un pezzo. Siccome però la spinta potrebbe romperlo in alcuna delle sue sezioni, così converrà esaminare la sua fermezza anche sotto questo rapporto. Il che ci basterà d'accennare, avendo già dato il modo di valutare la resistenza che proviene dalla tenacità.

La spinta verticale P tende a schiacciare il piediritto. Converrà paragonarla colla di lui resistenza alla compressione che si misura come al Cap. XIX del libro precedente.

La spinta orizzontale Q tende a romperlo per traverso. E qui considerando una sezion qualunque del piediritto, se ne troverà la resistenza rispettiva come al Cap. XVII dello stesso Libro. Solo deve avvertirsi che siccome il peso di quella proporzione del piediritto che poggia sulla sezione ajuta la di lei tenacità, opponendosi alla rotazione che la spinta Q tende ad indurre, così in luogo del momento della spinta si dovrà prendere l' eccesso di questo momento sopra il momento del peso che le contrasta.

CAP. III.

Rinfianchi de' piediritti.

581. Costumasi di rinfiancare esteriormente i piediritti rettangolari, o per mezzo d' una scarpa

andante per tutta la loro lunghezza, o per mezzo di contrafforti a luogo a luogo distribuiti. Doppio è il vantaggio di questi rianfianchi: aumentano il peso del piediritto e con ciò ne accrescono la resistenza: allontanano il suo centro di gravità dall'angolo esteriore attorno cui potrebbe rovesciarsi, e così accrescono vieppiù il momento della resistenza. Questi vantaggi possono agevolmente ridursi a calcolo.

582. *Proposizione I.* Trovare la resistenza d'un muro a scarpa contro la spinta orizzontale, ed il momento della resistenza.

Oltre le denominazioni dell'art. 578 e de' precedenti, sia p il piede o sia la base della scarpa. I prodotti fM, Mk diverranno

$$afG\left(b+\frac{1}{2}p\right);\quad aG\left(\frac{1}{2}b^2+bp+\frac{1}{3}p^2\right)$$

Il primo prodotto esprime la resistenza; il secondo esprime il momento della resistenza,

583. *Coroll. I.* Adunque pel puro equilibrio deve essere

$$afG\left(b+\frac{1}{2}p\right)=Q;$$

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2+bq+\frac{1}{3}p^2\right)=Qy.$$

Sia come nell'esempio precedente $a=y=12$; $Q=4500$; $G=2000$. E la scarpa suppongasi della sesta parte dell'altezza, onde sia $p=2$. Si cerchi in quest'ipotesi la grossezza b del muro rettangolare. Dalla seconda equazione si caverà $b=0,415$. Dalla prima non accade cercarne, poichè anche fatto $b=0$, la resistenza rimane superiore alla spinta.

Che se volesse conservarsi al muro la grossezza d' un metro, e si cercasse quale scarpa basterebbe per renderlo equilibrato, si farà $b = 1$, e si caverà $p = 1,23$. Basterebbe dunque una scarpa che fosse poco più d' un decimo dell' altezza.

584. *Coroll. II.* Se la medesima scarpa fosse apposta dalla parte interna, sarebbe men vantaggiosa: che allora il momento della resistenza riuscirebbe soltanto

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}bp+\frac{1}{6}p^2\right)$$

Minor vantaggio riporterebbe ancora chi invece di aggiungere la scarpa, volesse ingrossare il muro d' altrettanto, accrescendone la grossezza di $\frac{1}{2}p$; poichè il momento dalla resistenza riuscirebbe

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}bp+\frac{1}{8}p^2\right).$$

585. *Proposizione II.* Trovare la resistenza d' un muro esternamente difeso da contrafforti parallelepipedi, eguali ed equidistanti; ed il momento della resistenza.

Rappresenti la Fig. 43 la pianta del piediritto, e i due punti L, G dividano per mezzo gl' intervalli de' contrafforti. Supponendosi che la spinta orizzontale operi egualmente su tutta la lunghezza del muro basterà considerarne il pezzo chiuso tra le sezioni Ll, Gg. Condotto un piano verticale per la sezione di mezzo AB, cadrà su questo piano così il centro di gravità del solido, come la direzione della spinta tendente da B verso A.

Posto ciò sia l' altezza del muro $= a$; la sua

grossezza $Ll = BH = b$; la lunghezza del contrafforte $HA = C$; la di lui grossezza $MN = PQ = p$; l' intervallo $LG = Hh = d$.

Qui i due prodotti fM, Mk riusciranno

$$afG(bd + cp); \quad aG\left(\frac{1}{2}b^2d + bcd + \frac{1}{2}c^2p\right)$$

de' quali il primo dà la resistenza; il secondo dà il momento della resistenza.

Eguagliando questi valori alla spinta Q ed al suo momento Qy si avranno come prima le condizioni dell' equilibrio; e date le dimensioni del muro o del rinfianco a riserva di una, si potrà questa determinare siccome conviene per l' equilibrio.

586. *Coroll. I.* Men vantaggioso si troverebbe il contrafforte interno; e meno ancora, se tutta la solidità de contrafforti si convertisse in uniforme ingrossamento del muro.

587. *Coroll. II.* Talvolta il contrafforte è un prisma di base trapezia, essendo la coda PQ maggiore o minore del collo o sia radice MN. Sia come prima $MN = p$, e sia $PQ = q$.

Allora pel contrafforte esterno il momento della resistenza si troverà

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2d + bcd + \frac{1}{9}c^2(2p + q)\right)$$

e pel contrafforte interno

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2d + \frac{1}{2}bc(p + q) + \frac{1}{6}c^2(p + 2q)\right)$$

Da che si vede essere più vantaggiosa ai contrafforti esterni la forma $p > q$; ed agl' interni la forma $p < q$.

588. *Coroll. III.* Aggiungiamo un esempio a

dichiarazione delle proposte formole. Sia la spinta nella lunghezza d' un metro $= 4500$; $G = 200$; $a = y = 12$; $d = 5$; $c = 3$; $p = 2,3$; $q = 1,6$. Si cerca la grossezza b che dovrà avere il muro affinchè il momento della resistenza pareggi quello della spinta. Si suppone il contrafforte apposto esteriormente.

Qui è da notare che ponendosi $= 4500$ la spinta sulla lunghezza d' un metro, la spinta sulla lunghezza d che val cinque metri sarà cinque volte maggiore, onde sarà $Q = 22500$. Ora introdotti i valori numerici nell' equazione

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2d + bcd + \frac{1}{6}c^2(2p + q)\right) = Qy$$

si avrà $b = 0,127$. E tal grossezza porrà il muro in istato d' equilibrare la spinta.

CAP. IV.

Della spinta de' terrapieni.

589. *Lemma*. Posto un peso R sopra un piano inclinato alla verticale coll' angolo m, cercasi qual potenza orizzontale A sarà bastante a trattenerlo, sicchè non corra giù pel piano, avendo riguardo all' attrito.

Decomposta ciascuna delle forze R, A in due, l'una parallela, l'altra normale al piano, ne risulterà parallelamente al piano la forza $R \cos. m - A \sin. m$, e normalmente al piano la forza $R \sin. m + A \cos. m$. Ora per l' equilibrio deve la prima di queste forze

eguagliar precisamente l' attrito. Sarà dunque
$R \cos. m - A \sin. m = fR \sin. m + fA \cos. m$
onde si trae

$$A = R . \frac{1 - f \text{ tang. } m}{\text{tang. } m + f},$$

590. *Coroll.* Quindi se invece d' una potenza orizzontale, il peso R fosse trattenuto da un muro, o da un ostacolo qualunque, la spinta orizzontale eccitata dal peso contro l' ostacolo sarebbe quella stessa

$$R . \frac{1 - f \text{ tang. } m}{\text{tang. } m + f}.$$

591. *Proposizione.* Determinare la spinta orizzontale del terrapieno $BCEF$ (Fig. 44) contro del muro $ABCD$, e il momento di questa spinta per rovesciarlo attorno l' angolo A.

Consideriamo la spinta del triangolo di terra BCE, di cui la scarpa BE declini dalla verticale coll' angolo $CBE = m$. Le rette PM, pm parallele a BE chiudano il trapezio elementare $PpmM$. Sia $BC = a$, $CP = x$, $Pp = dx$; sarà il trapezio $PpmM = x dx$ tang. m; e chiamando g il peso specifico della terra, sarà il peso di quel trapezio $= g x dx$ tang. m. Adunque la spinta orizzontale ch' esso esercita sulla retta Pp sarà (590)
$g x dx \text{ tang. } m . \frac{1 - f \text{ tang. } m}{\text{tang. } m + f}$, o sia
$g x dx . \frac{1 - f \text{ tang. } m}{1 + f \cot. m}$.

Facendo per brevità $\frac{1 - f \text{ tang. } m}{1 + f \cot. m} = M$ sarà la suddetta spinta $M g x dx$, ed integrando, e

poscia facendo $x=a$ sarà la spinta totale $\frac{1}{2} a^2 g M$.

Similmente il momento della spinta elementare esercitata sopra Pp è $Mg\,(a-x)\,x\,dx$; ove integrando, e poi facendo $x=a$ avremo il total momento della spinta $= \frac{1}{6} a^3 g M$.

Resta a fissare l' angolo m. Si osservi (*) che tanto la spinta quanto il suo momento si annullano, o sia tang. $m=0$, o sia tang. $m=\frac{1}{f}$. Tra questi due valori hà dunque un valore intermedio, cui risponde la massima spinta, e il massimo momento. Questo valore si trova facendo $dM=0$, e riesce

$$\text{tang. } m = -f + \sqrt{(1+f^2)}$$

Sostituendo questo valore in quello di M trovasi la spinta

$$\frac{1}{2} a^2 g \left\{ -f + \sqrt{(1+f^2)} \right\}^2 = \frac{1}{2} a^2 g \text{ tang. } m^2$$

ed il momento della spinta

$$\frac{1}{6} a^3 g \left\{ -f + \sqrt{(1+f^2)} \right\}^2 = \frac{1}{6} a^3 g \text{ tang. } m^2$$

Il che si cercava.

592. *Coroll. I.* L' angolo che ha per tangente $\frac{1}{f}$ è (508) l' angolo della scarpa che prenderebbe la terra naturalmente da se, quando non fosse sostenuta da verun rivestimento.

(*) Coulomb, *Mém. presentées etc.* Tom. VII.

L' angolo m che ha per tangente $-f+\sqrt{(1+f^2)}$ è precisamente la metà dell' angolo che ha per tangente $\frac{1}{f}$, come facilmente può verificarsi mediante la nota espressione della tangente dell'angolo doppio.

Sia dunque BF la scarpa che prenderebbe naturalmente da se la terra sciolta. La linea BE che determina quel triangolo di terra che esercita la massima spinta contro il muro di rivestimento, divide per metà l' angolo CBF.

593. *Coroll. II.* Abbiamo veduto che le terre sabbiose e scorrevoli si dispongono (508) sopra un declivio di gradi 60 dalla verticale, e le terre forti sopra un declivio di gr. 54. Dunque per un terrapieno composto di terre sciolte avremo $m = 30.°$, e per un altro di terra forte sarà $m = 27.°$

Quindi pel primo sarà il valor della spinta $= \frac{1}{6} a^2 g$, e il momento della spinta $= \frac{1}{18} a^3 g$. Pel secondo la spinta sarà solamente $= \frac{1}{8} a^2 g$, ed il suo momento $= \frac{1}{24} a^3 g$.

594. *Coroll. III.* Conoscendosi la spinta orizzontale del terrapieno, e il suo momento, sarà facile proporzionarle la resistenza del rivestimento $ABCD$, trovandone le dimensioni opportune per l' equilibrio.

Sia il muro $ABCD$ rettangolare alto metri 12 al pari del terrapieno. Sia $G = 2000$ qual è comunemente il peso specifico de' mattoni; $g = 1428$ quale suol essere il peso specifico delle terre forti, giacchè di tal qualità supporremo essere il terrapie-

no. Si cerchi la grossezza b da darsi al muro onde il momento della resistenza pareggi il momento della spinta.

Il momento della spinta si troverà $\doteq 102816$; a cui mettendo uguale il momento della resistenza (578) $\frac{1}{2} a b^2 G$, troveremo $b = 2,93$.

Dando al muro una scarpa d' un sesto dell' altezza, si troverebbe similmente per l' art. 583 la grossezza $b = 1,15$.

CAP. V.

Dell' equilibrio e della spinta de' Poligoni.

595. Di più travi connesse a foggia di poligono si compongono i tetti, i ponti di legno, le armature de' palchi, ed altre opere di simil fatta. Le travi pel proprio peso e pel carico sovrapposto si spingono e si premono scambievolmente, ed insieme spingono e premono i piediritti che ne sostengono le estremità. Non si tralascia di commetter le travi quanto meglio si può, per impedire il chiudersi o l' aprirsi degli angoli; ma poichè queste commessure non hanno forza nè molto gagliarda nè durevole, così giova cercare in primo luogo come possa, darsi al poligono tal forma che le travi s' equilibrino fra loro stesse. Cercasi in secondo luogo la spinta che il poligono così equilibrato esercita sui piediritti, affine di proporzionarvi la loro resistenza.

Per queste ricerche non abbiamo che a riportarci al Cap. XXI. del Libro I. ove gli articoli

157. 160. 161. 163 comprendono la soluzion generale de' due problemi accennati, e di più altri che in tal argomento potrebbono offrirsi. Qui non faremo che indicare i risultati di quella Teoria per alcuni casi più ovvj. Nel che supporremo che il tetto o poligono qualunque sia simmetrico attorno la verticale di mezzo, così per la forma, come per la distribuzione del peso. Ricorderemo ancora, che i pesi che aggravano le travi, comunque siano distribuiti, ponno sempre ridursi (164) alle loro estremità, o sia agli angoli del poligono.

596. *Proposizione. I.* Sia il tetto triangolare (Fig. 45) BCD; il peso applicato al colmo $C = 2P$; il peso applicato a ciascun de' punti $B, D = V$; l' angolo $BCK = m$. La spinta orizzontale sugli appoggi B, D sarà $= P$ tang. m; e la spinta verticale $= P + V$.

597. *Corollario.* Quando la larghezza BD rimanga la stessa, e le travi sieno cariche uniformemente, ed in proporzione della loro lunghezza, crescendo l'elevazione del tetto, scema la spinta orizzontale ne' termini B, D; e cresce la spinta verticale.

In fatti essendo allora P, e V proporzionali a BC o sia a $\frac{BK}{\text{sin. } m}$, sarà la spinta orizzontale alla verticale come $\frac{\text{cos. } m}{BK} : \frac{2BK}{\text{sin. } m}$. Dunque ec.

598. *Proposizione II.* Sia il tetto quadrangolare $ABDE$; il peso nell' angolo $B = Q$; il peso nel termine $A = V$; l' angolo $ABM = n$. La spinta orizzontale sugli appoggi A, E sarà $= Q$ tang. n; e la spinta verticale $= Q + V$.

599. *Proposizione III.* Sia il tetto pentagono $ABCDE$; il peso nel colmo $C = 2P$; nell' angolo $B = Q$; nel termine $A = V$; l' angolo $BCK = m$; l' angolo $ABM = n$. Per l' equilibrio dovrà essere

$$\frac{2P}{2\cot. m} = \frac{Q}{\cot. n - \cot. m}$$

o sia P tang. $m = (P + Q)$ tang. n.
Ed allora la spinta orizzontale sugli appoggi A, E sarà $= P$ tang. m; e la spinta verticale $= P + Q + V$.

600. *Coroll. I.* Se $2P = Q$, come avviene quando le travi sono eguali ed omogenee, la condizione dell' equilibrio è questa

$$\text{tang. } m = 3 \text{ tang. } n.$$

601. *Coroll. II.* Qui s' offre a sciogliere (*) il seguente Problema. Data la larghezza $AE = 2p$ e l' altezza $QC = q$, formare di quattro travi eguali un tetto equilibrato.

Chiamando a la lunghezza d' una trave, avremo queste tre equazioni

$$p = a \sin. n + a \sin. m\,; \quad q = a \cos. n + a \cos. m;$$

$$\text{tang. } m = 3 \text{ tang. } n$$

onde potrebbon cercarsi le tre incognite a, m, n.

Ma più facilmente s' otterrà l' intento così: Facciasi $AM = x$, $MB = y$, e sarà

$$\text{tang. } m = \frac{p - x}{q - y}\,; \quad \text{tang. } n = \frac{x}{y}$$

quindi le tre equazioni

$$x^2 + y^2 = a^2\,; \quad (p - x)^2 + (q - y)^2 = a^2$$

$$\frac{p - x}{q - y} = \frac{3x}{y}$$

(*) Couplet, *Mém. de l' Acad. de Paris* 1731.

delle quali facilmente si avranno le incognite a, x, y.

Così se sia $q = \frac{2}{3} p$ si troverà $a = 0{,}618\, p$; e se $q = p$, verrà $a = 0{,}732\, p$.

602. *Proposizione IV.* Sia il tetto pentagono $ABCDE$ fuor d' equilibrio; e per impedire la mossa degli angoli B, D siasi aggiunta la corda o piana BD, il di cui peso $= 2R$. Le estremità B, D di questa piana saranno spinte in fuori con forza P tang. m — $(P + Q + R)$ tang. n.

E gli appoggi A, E sosterranno la spinta orizzontale $(P + Q + R)$ tang. n; e la spinta verticale $P + Q + R$.

Ciò s' intenderà agevolmente qualora si osservi che per tal modo viene a formarsi un sistema composto del tetto triangolare BCD, e del quadrangolare $ABDE$. Il primo esercita sui punti B, D la spinta orizzontale all' infuori (596) $= P$. tang. m, e la spinta verticale $= P$. Quindi il tetragono $ABDE$ riesce gravato negli angoli B, D del peso $P + Q + R$; e però (598) esercita sugli appoggi A, E la spinta orizzontale all' infuori $= (P + Q + R)$ tang. n; e con altrettanta forza (160) i punti B, D vengono spinti all' indentro. Onde ec.

603. *Scolio I.* Sin qui abbiamo considerate le travi come se fossero spranghe d' invincibil fermezza; ma nel vero esse potrebbono spezzarsi in virtù del peso sovrapposto o del proprio, e potrebbono anche cedere alla compressione, o sia spinta che soffrono secondo la loro lunghezza, della

quale spinta agevolmente (161.) si determina il valore. Or conoscendosi gli sforzi ai quali soggiace ciascuna trave, si potrà pei Capi XVIII e XIX del Libro III esaminare la loro resistenza, e trovare le dimensioni che debbono avere perchè resistano quanto è d' uopo.

604. *Scolio II.* Allorquando la piana *B D*, ovvero *A E* unisce fra loro i due appoggi, essa risparmia a' piediritti il bisogno di resistere alla spinta orizzontale. Poichè allora i punti *B*, *D* ovvero *A*, *E* non possono portarsi in fuori senza spezzare la piana stessa, alla qual distrazione essa contrasta con forza per lo più sovrabbondante. Ad ogni modo converrà pel Capo XVI del Libro III assicurarsi che la piana tanto resista, quanto per ciò si richiede.

605. *Scolio III.* Ma poichè questa piana pel proprio peso potrebbe rompersi, costumasi d' unirla ad uno o più angoli del poligono per mezzo di travi diritti, o colonnetti. Così al colmo del tetto triangolare *B C D* s' attiene la piana *B D* pel colonnetto *C K*; e così pure la piana *A E* potria sostenersi coi colonnetti *A M*, *D N* ec. È da vedere quali sforzi nascono da questa disposizione.

La trave *B D* tende a rompersi nel mezzo (554) come se fosse applicata al punto *K* la metà del proprio peso. Quindi il colonnetto *C K* fa una forza equivalente alla metà del peso di *B D*; onde il colmo *C* resta gravato del peso di *C K* più la metà del peso di *B D*. Posto ciò si troverà facilmente l' aumento della spinta orizzontale che ne risulta sugli estremi *B*, *D*.

Similmente la trave AE tende a rompersi in M con forza tanto minore della metà del suo peso (552) quanto il rettangolo $AM.ME$ è minore del quadrato di AQ. Di questa forza adunque s' intenderanno gravati gli angoli B, D oltre il peso de' rispettivi colonnetti BM, DN.

CAP. IV.

Dell' equilibrio degli Archi e delle Cupole.

606. Affine di trattare ordinatamente questa parte importantissima dell'Architettura Statica, fia bene prima d' ogni altra cosa rimetterci a memoria quello che si dimostrò nel Primo Libro intorno l' equilibrio d' Archi che si supponevano costrutti di latercoli rigidi e pesanti semplicemente appoggiati l' uno contro l' altro, e così pure delle Cupole formate in simil guisa d' infiniti piani o faccette pesanti.

607. La curva d' equilibrio d' un Arco o d' una Volta composta di latercoli rigidi pesanti o carichi, è una catenaria (189) e chiamando Π il peso dell' Arco, ha per equazione $\Pi dy = A dx$.

608. Quindi se tutti i latercoli sono egualmente pesanti o egualmente caricati, la figura dell' Arco equilibrato sarà quella della catenaria omogenea, e potrà costruirsi per punti, o meccanicamente, come a suo luogo (183. 184) insegnammo. Che se il peso non è distribuito equabilmente, la curva sarà un' altra catenaria, la di cui figura e costruzione

dipenderà dalla legge colla quale sarà compartito il peso per la lunghezza dell' Arco, ossia dalla funzione che sarà Π delle coordinate della curva.

609. La superficie equilibrata d' una Cupola costrutta di zone minime circolari pesanti o caricate nasce (189) dalla rotazione d' una curva, la quale, chiamando $y\,d\Pi$ il peso della zona elementare, ha per equazione $dy\int y\,d\Pi = A\,dx$.

610. Se le faccette componenti la Cupola sono tutte ugualmente pesanti o ugualmente caricate, sarà $d\Pi$ proporzionale a ds, e la curva avrà per equazione $dy\int y\,ds = A\,dx$, ovvero per essere $ds = dy\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$

$$y\,dy = \frac{A\,d\,.\,\frac{dx}{dy}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}}.$$

611. Integrando per serie, potremo trovar modo (*) di descrivere per punti questa curva che dà la superficie della Cupola omogenea equilibrata, e che dà ancora (188) quella d' un vero omogeneo pendente dalla circonferenza d' un cerchio orizzontale. Facciasi $\frac{dx}{dy} = z$, ed avremo l' equazione

$$y\,dy = \frac{A\,dz}{\sqrt{(1 + z^2)}};$$

onde integrando per serie

$$y^2 = 2Az - \frac{Az^3}{3} + \frac{3Az^5}{4\,.\,5} - \frac{3\,.\,5Az^7}{4\,.\,6\,.\,7} + \text{ec.}$$

(*) Bouguer, *Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris* 1734.

e pel ritorno delle serie

$$=\frac{dx}{dy}=\frac{y^2}{2A}+\frac{y^6}{2.4.6A^3}+\frac{y^{10}}{2.4.6.8.10A^5}+\text{ec.}$$

Moltiplicando per dy, ed integrando di nuovo avremo in fine

$$x=\frac{y^3}{2.3A}+\frac{y^7}{2.4.6.7A^3}+\frac{y^{11}}{2.4.6.8.10.11A^5}$$
$$+\frac{y^{15}}{2.4.6.8.10.12.14.15A^7}+\text{ec.}$$

con legge manifesta.

612. La costante A sarà determinata quando sia data l' ordinata corrispondente ad una data ascissa. Vogliasi che all' ascissa $x=p$ risponda l' ordinata $y=q$. Faccio $A=\frac{q^2}{m}$, e dovrà essere

$$p=\frac{m}{6}+\frac{m^3}{336q^2}+\frac{m^5}{42240q^4}+\frac{m^7}{9676800q^6}+\text{ec.}$$

onde pel ritorno delle serie si caverà

$$m=6p-3{,}857\frac{p^3}{q^2}+6{,}354\frac{p^5}{q^4}-13{,}622\frac{p^7}{q^6}+\text{ec.}$$

e quindi A.

Così se all' ascissa $x=1$ dovrà corrispondere l' ordinata $y=10$, avremo con pochissimi termini della serie $m=5{,}96188$; onde $A=167{,}73$.

613. Per ultimo è necessario ricordare, che l' equazione $dy\int y\,d\pi = A\,dx$ dà la figura d' una Cupola la quale sarà equilibrata non solamente quando sia tutta chiusa d' intorno colle sue zone circolari intere e rientranti in sè stesse, ma ancora quando fosse aperta ed interrotta, in modo che un' unghia isolata ed appoggiata soltanto alla cima contro l' unghia opposta dovesse reggersi in equilibrio. Che se la

Cupola è intera, per formarne la superficie equilibrata non sarà necessario prender la curva dell'equazione $dy\int y d\Pi = A dx$, ma potrà servire (189) qualunque curva, nella quale sia $dy\int y d\Pi > A dx$, ossia $\frac{dy}{dx} > \frac{A}{\int y d\Pi}$.

614. Disegnata per tanto la curva dell' equazione $dy\int y d\Pi = A dx$, ogni altra curva che spiccandosi dallo stesso vertice si slarghi più di quella dell' asse, e sia da per tutto meno concava verso l' asse medesimo, sarà buona à descrivere mediante la sua rivoluzione la superficie d' una Cupola equilibrata.

615. Richiamati questi principj passeremo ora a considerare gli Archi e le Cupole quali sono in realtà, composti non già di linee o di piani, ma bensì di cunei di finita grossezza appoggiati l' un l' altro e reggentisi per lo scambievol contrasto.

CAP. VII.

Degli Archi di grossezza finita.

616. Sia l' Arco KaK' (Fig. 46) simmetrico attorno l' asse verticale AB, formato d' infiniti cunei pesanti $MmnN$ contigui ma non connessi fra loro, ed appoggiato a' pulvinari immobili Kk, $K'k'$. Preso dal vertice l' Arco qualunque $AamM$ insistente sul letto inclinato Mm, è manifesto che quest' Arco è tratto in giù dal proprio peso, ed insieme è spinto orizzontalmente dalla pressione che

l' Arco opposto $K'AaK'$ esercita nella linea Aa. Appoggiandosi dunque quell' Arco sulla base Mm, è necessario per l' equilibrio (*) che la risultante delle predette due forze sia perpendicolare alla base Mm, e non cada fuori della medesima. Mancando la prima condizione, l'Arco si sposterebbe strisciando lungo il letto Mm; mancando la seconda, roterebbe attorno quello dei due termini M, ovvero m, verso cui la risultante cadesse. Veggiamo qual figura debba aver l' Arco per soddisfare a queste condizioni.

617. *Proposizione I.* Per l' equilibrio dell' Arco KaK' si richiede in primo luogo, che preso dal vertice un arco parziale qualunque $AamM$ insistente sul letto Mm, il peso di quest' arco sia proporzionale alla tangente dell' angolo che fa il letto Mm colla verticale.

Sia Π il peso dell' arco $AamM$, A la spinta orizzontale sopra di Aa, e l' obbliquità del letto Mm alla verticale. Concorrano nel punto G le due forze Π, A espresse colle rette GV verticale, GO orizzontale. Dovendo la risultante GS esser normale al letto Mm, il triangolo delle forze GSO riuscirà simile al triangolo MmR fatto sull' ipotenusa Mm. Quindi $GV : GO :: mR : MR$ ossia $\Pi : A ::$ sin. e : cos. e. Dunque $\Pi = A$ tang. e.

618. *Coroll. I.* Non può un Arco sostenersi da se medesimo quando sia impostato sopra pulvinari orizzontali.

(*) Coulomb, *Mém. présentées etc.* Tom. VII.

In fatti non può divenire $e = 90^{\circ}$ senza che sia tang. $e = \infty$, e quindi $\Pi = \infty$; il che è impossibile.

619. *Coroll. II.* Si riporti la curva interiore AMK all' asse verticale AB, facendo $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, onde $MN = ds$. Dicasi z la grossezza Mm del cuneo cui risponde l' ascissa x. Calcoliamo l' area del quadrilatero $MmnN$ che esprime il profilo del cuneo, e conseguentemente anche il suo peso $d\Pi$. Per tal effetto conducasi Np parallela ad Mm. Nel triangolo nNp abbiamo l' angolo $nNp = de$; e se col centro N, raggio Np descriveremo l' archetto pq, sarà $pq = Np . de = z de$; perchè per essere i punti M, N vicinissimi tra loro, possiamo fare $Np = Nn = Mm = z$ non differendo queste rette salvo che per differenze infinitesime. Quindi l' area del triangolo nNp sarà

$$= \frac{1}{2} Nn . pq = \frac{1}{2} z^2 de.$$

Il trapezio $MmpN$ per lo stesso motivo dell' essere le parallele Mm, Np infinitamente poco differenti, può aversi per un parallelogrammo, di cui l' area sarà $= Mm . MN . \sin. mMN$. Ma l' angolo mMN è supplemento della somma degli angoli e, NMr; e però

$$MN . \sin. mMN = MN . \sin. e \cos. NMr + MN \cos. e \sin. NMr$$
$$= dx \sin. e + dy \cos. e .$$

Dunque il trapezio $MmpN = z (dx \sin. e + dy \cos. e)$.

Riunite le aree del triangolo e del trapezio, avremo infine l' area del quadrilatero

$$MmnN = d\Pi = \frac{1}{2} z^2 de + z (dx \sin. e + dy \cos. e)$$

Ma l' equazione (617) $\Pi = A$ tang. e differenziata dà $d\Pi = \frac{A\,de}{\cos.\, e^3}$. Dunque dovrà essere

$$\frac{1}{2} z^2\, de + z\,(dx \sin.\, e + dy \cos.\, e) = \frac{A\,de}{\cos.\, e^2}$$

Per mezzo di quest' equazione, se sarà data la curva interna e la legge colla quale procedono le obbliquità de' cunei, potremo assegnare la grossezza z competente a ciascun punto dell' Arco; o viceversa date le grossezze, potremo trovare le direzioni de' tagli da darsi ai cunei, affinchè riesca l'Arco equilibrato.

620. *Coroll. III.* Consideriamo specialmente il caso nel quale i tagli de' cunei si fanno perpendicolari alla curva interna; il qual caso è il più frequente nella pratica, ed offre le più notabili particolarità.

In tal caso adunque l' angolo mMN essendo retto, sarà l' angolo e complemento dell' angolo NMr. Quindi tang. $e = \frac{dx}{dy}$, onde l' equazione $\Pi = A$ tang. e diventa $\Pi\, dy = A\, dx$, equazione della catenaria.

Adunque quando i cunei insistono perpendicolarmente sulla curva interna, la figura di questa curva dovrà essere una catenaria, nè più nè meno come (607) per gli Archi lineari. Se l' Arco è omogeneo e d' uniforme grossezza, dovrà avere la forma della catenaria omogenea; se no, la figura della catenaria sarà determinata dalla legge colla quale il peso è distribuito lungo il dorso dell' Arco.

621. *Coroll. IV.* Per trovar la grossezza z conveniente a ciascun punto dell'Arco, ricorrasi all'equazione (619) tra z ed e che nel caso nostro si riduce a questa più breve

$$\frac{1}{2} z^2 de + z ds = \frac{A de}{\cos. e^2}$$

Dicasi R il raggio osculatore della curva AMK nel punto M; sarà $R = \frac{ds}{de}$; onde l'equazione diventa

$$z^2 + 2Rz = \frac{2A}{\cos.\ e^2}$$

e quindi $z = -R + \sqrt{\left(RR + \frac{2A}{\cos.\ e^2}\right)}$

La costante A si determina facilmente quando si conosca la grossezza della Volta in un punto dato, per esempio nella chiave Aa, dove l'angolo $e = 0$.

622. *Coroll. V.* Per esempio sia AMK un Arco di circolo, $Aa = m$, e vogliasi determinare la grossezza della Volta a distanza di 45 gradi dal vertice.

Sarà R costante, uguale al raggio dell'Arco, ed essendo $z = m$ quando $e = 0$, avremo
$m^2 + 2Rm = 2A$, e

$$z = -R + \sqrt{\left(RR + \frac{2Rm + m^2}{\cos.\ e^2}\right)}$$

Ora posto $e = 45^\circ$, sarà $\cos. e^2 = \frac{1}{2}$; onde

$$z = -R + \sqrt{(R^2 + 4Rm + 2m^2)}$$

Questo valore, quando R eccede notabilmente la grossezza m, pochissimo differisce da $2m$. Quindi ai gradi 45 dovrà la Volta esser grossa poco meno del doppio di sua grossezza alla chiave.

623. *Proposizione II.* Per l' equilibrio dell' Arco *K a K'* si richiede in secondo luogo, che preso dal vertice un Arco parziale qualunque *A a m M* (Fig. 47) la verticale condotta pel centro di gravità di quest' Arco passi a traverso il parallelogrammo *f g h i* compreso dalle normali ai termini de' letti *A a*, *M m*.

Altrimenti la risultante delle due forze Π, *A* cadrebbe fuori della base *M m* sulla quale l' Arco s' appoggia.

Ed altronde è manifesto, che se la verticale condotta pel centro di gravità dell' Arco cade fuori del parallelogrammo *f g h i*, da nissun punto di quella verticale non si potranno condurre due perpendicolari, l' una sopra *A a*, l' altra sopra *M m*; e però (138) il peso dell' Arco *A a m M* non potrà essere retto da' due sostegni *A a*, *M m*.

624. *Scolio.* Quando i letti sono perpendicolari alla curva interna, agevolmente potremo assicurarci, che mentre sia adempiuta la prima condizione dell'equilibrio, resta adempiuta ancora quest' ultima. Poichè la curva interna essendo allora una catenaria (620) se il peso di ciaschedun cuneo fosse tutto raccolto nel corrispondente latercolo *M N*, la verticale condotta pel centro di gravità dell'Arco *A a m M* passerebbe pel punto *f* (162) intersezione delle tangenti estreme *A f*, *M f*. Ora per *m* si conduca la curva *m C* perpendicolare a' tagli prolungati dei cunei, e questa incontri in *C* il taglio del vertice *A a*. Sarà essa pure una catenaria; e se il peso d' ogni cuneo fosse raccolto nel corrispondente latercolo di questa curva *m C*, la verticale condotta

pel centro di gravità dell' Arco $AaMm$ passerebbe pel punto p intersezione delle tangenti estreme Cp, mp.

Essendo in realtà il peso dell' Arco distribuito tra le due curve AM, Cm, la verticale del suo centro di gravità cadrà fra i punti fp. E qui facilmente si scorge, che essendo $AC = Mm$, il parallelogrammo $fgpq$ sarà un rombo avente gli angoli ottusi in f, p; e però cadendo quella verticale fra i punti f, p non potrà non attraversare il parallelegrammo $fghi$.

CAP. VIII.

Delle Volte piane, o Piattabande.

625. Sia la piattabanda orizzontale KaK' (Fig. 48) d' uniforme grossozza appoggiata a' pulvinarj Kk, $K'k'$, e composta d' infiniti cunei, come $MmnN$ egualmente disposti dall' una e l' altra banda della chiave verticale Aa. Applicando a questa specie di Volte le due condizioni d' equilibrio di sopra notate (616) veggiamo come debban esser costrutte affinchè riescano equilibrate.

626. *Proposizione I.* Per l' equilibrio della piattabanda ricercasi in primo luogo che la tangente dell' inclinazione di ciaschedun letto Mm alla verticale sia proporzionale alla distanza AM dell' origine di esso letto dalla chiave Aa.

In fatti dovrà essere, servate ed applicate le solite denominazioni, $\Pi = A$ tang. e. Ma

$$n = AamM = Aa \,.\, AM + \frac{1}{2} Aa^2 \text{ tang. } e$$

Dunque dovrà essere

$$Aa \,.\, AM + \frac{1}{2} Aa^2 \text{ tang. } e = A \text{ tang. } e$$

ossia $$Aa \,.\, AM = \left(A - \frac{1}{2} Aa^2\right) \text{ tang. } e$$

dove essendo A ed Aa costanti, è manifesto essere AM proporzionale a tang. e.

627. *Corollario.* Di qui segue che i tagli de' cunei prolungati debbono tutti concorrere in uno stesso punto C della verticale Aa.

In fatti sia C il punto dove il letto Mm incontra la verticale. Sarà l'angolo $ACM = e$; ed $AC = \frac{AM}{\text{tang. } e}$. Ma AM è proporzionale (626) a tang. e. Dunque AC è costante per tutta la piattabanda, onde ec.

Adunque stabilita la posizione dell' imposta Kk, e quindi il centro C dove la linea dell' imposta incontra la Aa, se si dividerà la larghezza KK' in quante si vogliono parti, le rette condotte dal centro C a tutti i punti di divisione segneranno le direzioni da darsi ai tagli de' cunei, onde comporre di essi una piattabanda equilibrata.

628. *Proposizione. II.* Per l'equilibrio della piattabanda si ricerca in secondo luogo, che ergendo dall' origine K del pulvinare la KP perpendicolare a Kk, la verticale condotta per il centro di gravità della mezza piattabanda $AakK$ passi pel triangolo KPk.

Ciò risulta dall' art. 623. Siccome poi proce-

dendo dall' imposta verso la chiave, i letti Mm sono sempre meno obbliqui alla verticale (626), così è facile assicurarsi che adempiuta questa condizione d'equilibrio per la mezza piattabanda $AakK$, molto più sarà adempiuta per qualunque suo pezzo $AamM$.

629. *Coroll. I.* Per esprimere analiticamente questa condizione, notiamo come essa si riduce a questo; che la distanza del centro di gravità della mezza piattabanda dalla chiave Aa debb' essere maggiore di aP.

Ora dicasi la larghezza $AK = a$, la grossezza $Aa = m$; e la Qk che determina lo sporto, o l' inclinazione del pulvinare, facciasi $= x$. Ricercando la distanza del centro di gravità del trapezio $AakK$ dal lato Aa, troveremo tal distanza essere $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}.\frac{3ax + 2x^2}{2a + x}$. Dall' altra parte ritrovasi pur facilmente $aP = \frac{ax - m^2}{x}$. Dunque dovrà essere

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}.\frac{3a^2x + 2x^3}{2a + x} > \frac{ax - m^2}{x}$$

ossia $x^3 - 3(a^2 - m^2)x + 6am^2 = 0$

Per la qual condizione essendo dati due fra i tre elementi a, m, x potremo determinare il limite entro il quale dovrà contenersi il terzo.

630. *Coroll. II.* Suppongasi per esempio una piattabanda costrutta sopra un triangolo equilatero, cosicchè l' imposta declini dalla verticale con angolo di 30 gradi, e si domandi a quanto potrà estendersi la sua tratta, o larghezza KK'.

Dicasi la grossezza $Aa = m = 1$; ed essendo l'angolo $QKk = 30^\circ$, sarà $Qk = x = \text{tang. } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Sostituiti questi valori, troveremo $a < 3,76$; onde $2a = KK' < 7,52$. Dunque la tratta KK' potrà essere tutt' al più sette volte e mezzo magggiore della grossezza.

CAP. IX.

Delle Cupole di grossezza finita.

631. Rappresenti la Fig. 49 l' unghia solida d' una Cupola simmetrica nata dalla rotazione della curva AMK, e sia $K\lambda'$ la porzion corrispondente del pulvinare immobile, sul quale s' appoggia la Cupola. Chi volesse che l' unghia isolata, e sostenuta soltanto dalla sua eguale ed opposta fosse in equilibrio, dovrebbero aver luogo delle condizioni analoghe a quelle che determinano l' equilibrio degli Archi. Presa dal vertice la porzion qualunque $Ma\mu'$, la risultante del suo peso e dello sforzo orizzontale esercitato in Aa dall' unghia opposta dovrebb' essere perpendicolare sul letto $M\mu'$, e passare per qualche punto del medesimo. Ma ricercandosi l' equilibrio non già nell' unghia solitaria ma bensì nell' intera Cupola, potrà quella risultante declinare dal perpendicolo cadente sul letto $M\mu'$, purchè ne declini piegando verso l' asse, o sia verso l' interno della Cupola, e non mai verso la parte opposta. Poichè se quella risultante declina

piegando verso l'asse, l'unghia $M a \mu'$ tenderà a sdrucciolare in giù da m verso M; ma essendo la stessa tendenza in tutte le altre unghie che le stanno attorno per tutto il giro della Cupola, ed esercitandosi questa tendenza da tutte nello stesso tempo e con forza uguale, ben si vede che tali sforzi s' impediscono e si elidono l' un l' altro, nè ponno avere effetto per cui la Cupola si dissolva. Per lo contrario se la risultante piega all' infuori, l' unghia tenderà a strisciare da M verso m schizzando fuori della Cupola, al quale sforzo nulla si oppone. Di qui nasce la seguente condizion fondamentale dell' equilibrio.

632. *Proposizione I.* Per l' equilibrio della Cupola si richiede che prese dal vertice le porzioni d' unghia $M a \mu'$, $N a \nu'$ ec. i pesi di queste crescano in ragion maggiore che non fanno le tangenti delle obbliquità de' piani $M \mu'$, $N \nu'$ ec. alla verticale.

Dim. Si ripigli la costruzione e la figura dell' art. 617. Potendo qui la GS (Fig. 46) essere obbliqua al letto Mm, purchè cada verso l' asse AB, sarà generalmente $\frac{GV}{GO} > \frac{MR}{MR}$. Chiamando dunque $\int y\, d\Pi$ il peso dell' unghia $M a \mu'$ (Fig. 49), A la spinta orizzontale nel vertice, e l' inclinazione del piano $M \mu'$ alla verticale, sarà $\int \frac{y\, d\Pi}{A} > \frac{\sin. e}{\cos. e}$; ossia $\int y\, d\Pi > A \operatorname{tang.} e$. E qui siccome le quantità $\int y\, d\Pi$ e tang. e partono entrambe dallo zero, e crescono continuamente, è forza, che le prime crescano in ragion mag-

giore delle seconde; onde sarà pure differenziando
$y\,d\,\Pi > \frac{A\,de}{\cos.\,e^2}$.

633. *Coroll. I.* Nessuna Cupola può rimanere equilibrata per sè medesima, quando s' appoggi sopra pulvinare orizzontale.

634. *Coroll. II.* Sia z la grossezza Mm della Cupola nel punto M, cui risponde l' ascissa x. E prendiamo a calcolare il solido $M\nu'$ che esprime anche il peso $y\,d\Pi$ del cuneo. Questo solido si avrà (83) moltiplicando l' area dal quadrilatero $MmnN$ pel viaggio descritto del suo centro di gravità G. Trovasi il centro G sulla retta FH che biseca i lati opposti MN, mn; ed essendo $MN = ds$, mn, $= ds + z\,de$, risulta (76) $FG = \frac{1}{3}z \cdot \frac{3ds + 2z\,de}{2ds + z\,de}$. Quindi si ha $GQ = FG \sin.e$; ed il raggio del circolo descritto dal centro $G = y + GQ = y + FG \sin.\,e$. Esprimendo adunque per l' unità il valore dell' angolo cui sottende l' arco $M\mu$, sarà il viaggio del centro di gravità $= y + \frac{1}{3}z \sin.\,e \cdot \frac{3ds + 2z\,de}{2ds + z\,de}$. In fine moltiplicando questo viaggio per l' area del quadrilatero $MmnN$ già calcolata (619) avremo

$$M\nu' = y\,d\Pi = \left\{\frac{1}{2}z^2 de + z(dx \sin.\,e + dy \cos.\,e)\right\} \times \left\{y + \frac{1}{3}z \sin.\,e\,\frac{3ds + 2z\,de}{2ds + z\,de}\right\}$$

E dovrà la grossezza in ciascun punto esser tale che questa espressione non diventi mai minore di $\frac{A\,de}{\cos.\,e^2}$.

635. *Coroll. III.* Fermiamoci nel caso dei letti perpendicolari alla curva interna; il qual caso è così frequente in pratica, che può aversi per universale. L' espressione del solido $M\nu'$ diventa allora assai più semplice. Poichè essendo $\sin. e = \frac{dx}{ds}$, $\cos. e = \frac{dy}{ds}$, $\tang. e = \frac{dx}{dy}$, ed il raggio osculatore $R = \frac{ds}{de}$, troveremo

$$M\nu' = \left(\frac{1}{2}z^2 + Rz\right)\left(y + \frac{1}{3}z\sin. e\,\frac{3R+2z}{2R+z}\right)de$$

E se la grossezza z sarà da per tutto assai piccola in confronto del raggio R, avremo ancor più semplicemente

$$M\nu' = zy\,ds + \frac{1}{2}z^2\,dx$$

Finalmente si noti che quando la y è assai piccola e comparabile alla z, l' elemento dx è ordinariamente piccolissimo in confronto dell' elemento ds, e il secondo termine del valore di $M\nu'$ può trascurarsi in confronto del primo. Il che molto più si può fare quando la y è cresciuta cosicchè sia divenuta molto maggiore della z. Quindi parmi che si possa, tralasciando il secondo termine, fare $M\nu' = yz\,ds$, siccome fece Bouguer (*) comecchè Mascheroni ne lo abbia ripreso (**).

(*) *Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris.* 1734.

(**) *Nuove ricerche sull'equilibrio delle Volte*, pag. 89.

636. *Coroll. IV.* Fatto adunque $M' = y\,d\,\Pi = y\,z\,d\,s$, dev' essere per la condizione dell' equilibrio (632) $\int y\,d\,\Pi > A$ tang. e ossia $\int y\,z\,d\,s > \frac{A\,d\,x}{d\,y}$. Quindi, prendendo i logaritmi dovrà essere

$$\log.\int y\,z\,d\,s > \log.\frac{A\,d\,x}{d\,y}$$

e differenziando

$$\frac{y\,z\,d\,s}{\int y\,z\,d\,s} > \frac{d\,y}{d\,x}\,d\,.\frac{d\,x}{d\,y}$$

Potremo per mezzo di questa comparazione data la curva che col suo giro descrive il concavo della Cupola, regolare le grossezze de' cunei a luogo a luogo in tal guisa che si mantenga l' equilibrio: oppure data essa curva, e date ancora le grossezze, giudicare se una cupola sia per essere equilibrata. Il che come debba farsi dichiareremo colle due seguenti Proposizioni.

637. *Proposizione II.* Data la curva generatrice della Cupola, trovare la scala delle grossezze convenienti per l' equilibrio.

Dovendo essere $\frac{y\,z\,d\,s}{\int y\,z\,d\,s} > \frac{d\,y}{d\,x}\,d\,.\frac{d\,x}{d\,y}$

facciasi $\frac{y\,z\,d\,s}{\int y\,z\,d\,s} = \frac{p\,d\,y}{d\,x}\,d\,.\frac{d\,x}{d\,y}$

essendo p un coefficiente positivo e maggiore dell' unità. Integrando avremo

$$\int y\,z\,d\,s = A\left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^{p}$$

onde $$z = \frac{A\,p}{y\,d\,s}\left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^{p-1} d\,.\frac{d\,x}{d\,y}$$

638. *Còrollario*. Sia per esempio una Cupola sferica del raggio R. L' equazione del circolo generatore sarà $y^2 = 2Rx - x^2$; e sarà

$$y\,ds = R\,dx\,; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{R-x} = \frac{\sqrt{(2Rx-x^2)}}{R-x}$$

Sostituendo questi valori viene

$$z = \frac{pAR(2Rx-x^2)^{\frac{1}{2}p-1}}{(R-x)^{p+1}}$$

e potrà prendersi per p qualsivoglia numero positivo, e maggiore dell' unità.

Se è prescritta la grossezza m che deve avere la Cupola nella chiave Aa, bisogna fare che quando $x = 0$, risulti $z = m$. Per ciò convien prendere $p = 2$, $A = \frac{1}{2} m R^2$, ed avremo per la scala delle grossezze

$$z = \frac{mR^3}{(R-x)^3}.$$

639. *Proposizione III.* Data la curva generatrice della Cupola, e data la scala delle grossezze, esaminare se tal Cupola soddisfaccia alla condizione dell' equilibrio.

Qui essendo z ed y funzioni cognite della x, basterà osservare se si verifica per qualunque valore della x la condizione

$$\frac{yz\,ds}{\int yz\,ds} > \frac{dy}{dx}\,d\,.\,\frac{dx}{dy}$$

640. *Corollario*. Sia di nuovo la Cupola sferica. Si vuol sapere se ella potrà sostenersi, dandovi una grossezza costante $= m$.

644. *Coroll. II.* Avremo poi

$$d\,\Pi = \frac{A\,d\,e}{\cos.\,e^2}\cdot\frac{1+f^2}{(\mp f\,\text{tang.}\,e)^2}$$

e questo valore dovremo porre nell' equazione (619) fra z ed e, e così avremo i limiti entro i quali possono variare le grossezze dell' Arco, salvo l' equilibrio.

645. *Coroll. III.* Così nell' esempio dell' art. 622. per l' Arco circolare, riuscirà

$$z = -R + \sqrt{\left\{RR + \frac{2\,R\,m + m^2}{\cos.\,e^2\,(1 \mp f\,\text{tang.}\,e)^2}\right\}}$$

Quando R sorpassi notabilmente la grossezza m, si ha prossimamente

$$z = \frac{m}{\cos.\,e^2(1 \mp f\,\text{tang.}\,c)^2}$$

formola assai comoda a calcolare per ciascun punto dell' Arco la conveniente grossezza. Col segno superiore avremo la grossezza massima, e col segno inferiore la minima che possa darsi all' Arco. Sarà facile il formarne delle Tavole, ed anche il delineare per punti le due curve, o sia scale, l' una delle maggiori, l' altra delle minori grossezze. Ed allora qualunque siasi la curva esterna dell' Arco, purchè non esca fuori de' limiti delle due curve suddette, l' Arco sarà sicurissimo in riguardo a questa prima condizione dell' equilibrio.

646. *Coroll. IV.* Nella scala delle minori grossezze s' incontra un valor minimo, dove tang. $e = f$, che dà $z = \frac{m}{1+f^2}$. E nella scala delle grossezze maggiori s' incontra un massimo, dove cot. $e = f$, il quale dà z infinito. Al punto poi dove $e = 90^\circ$

cioè nell' imposta orizzontale, entrambe le curve concorrono nello stesso valore di $z = \frac{m}{f^2}$.

Così posto $f = 0{,}75$ il più che possa l' Arco assotttigliarsi ne' fianchi sarà a distanza di quasi 37 gradi dal vertice, ove viene $z = 0{,}64\, m$; onde quivi può ridursi ai due terzi della sua grossezza alla chiave: ed il più che possa ingrossarsi sarà verso i 53 gradi, ove la sua grossezza può crescere indefinitamente.

647. *Proposizione II.* Affinchè l' arco $A\ a\ m\ M$ non faccia mossa girando attorno i punti M, m sussiste la condizione esposta all' art. 623. Se non che potendo la risultante $G\ S$ cadere sulla $M\ m$ con qualunque obbliquità compresa ne' limiti (643) di Ang. cot. $\pm f$, le rette $M\ i$, $m\ h$ (Fig. 47) dovrano inclinarsi alla $M\ m$ con angolo ottuso che abbia per cotangente $-f$. E basterà assicurarsi che la verticale condotta pel centro di gravità dell' Arco non esca fuor del trapezio $f\ g\ h\ i$.

648. *Scolio.* Assicurato l' equilibrio dell' Arco, resta a considerare la spinta che esso esercita contro i pulvinari. Esso si appoggia sopra di loro, come se fosse tutto d' un pezzo; quindi se il peso di tutto l' Arco $K\ a\ K'$ sia $2\ R$, e i pulvinari declinino dalla verticale con angolo E, ciascuno d' essi sosterrà la spinta normale (138) $\frac{R}{\sin. E}$, onde la spinta orizzontale $= R$ cot. E, e la spinta verticale $= R$. Sarà facile pel Capo il proporzionare a queste spinte le dimensioni de' piediritti.

CAP. XI.

Dell' equilibrio delle Volte avendo riguardo alla tenacità de' cementi.

649. Dopo l' attrito si offre a considerare la tenacità del cemento che legando i cunei, e ritenendoli dallo scorrere l' un sopra l' altro concorre efficacemente a mantenere l' equilibrio e la stabilità delle Volte. Se questa resistenza fosse invincibile, l' Arco sarebbe come tutto un masso, e qualunque figura s' avesse, sarebbe sempre abbastanza sicuro, purchè i piediritti avessero forza bastevole a sostenerlo.

Ma sebbene tal resistenza per la debole forza e per la facile depravazione de' cementi non possa a gran pezza riguardarsi come insuperabile, pure ne conseguita di necessità quest' effetto; che quando l' Arco venga a crollare non si scomporrà in tutte le sezioni come farebbe un Arco composto di cunei staccati, ma da prima cederà nelle sezioni più deboli, dividendosi il masso dell' Arco in tre o in quattro pezzi al più. Poichè l' Arco non potrà cedere da principio se non che o in due sezioni, come in Bb, Dd (Fig. 50) ovvero in tre, come in Bb, Cc, Dd.

Di qui ci si apre una via assai facile di esaminare sotto quest'aspetto la fermezza di qualunque Arco proposto, ed insieme la forza de' piediritti per sostenerlo. Il che si farà considerando partitamente quelle due maniere nelle quali l' Arco po-

trebbe aprirsi, e per ciascuna di queste mosse paragonando le forze che tendono ad imprimerla con quelle che vi contrastano.

650. Quella mossa dell' Arco che apre soltanto le due sezioni $B\,b$, $D\,d$ avviene allorquando l' Arco superiore $B\,C\,D$ discende tutto d' un pezzo scostando colle sue spinte laterali i piani $B\,b$, $D\,d$. Quella mossa poi che insieme colle sezioni de' fianchi apre la cima $C\,c$ avviene allorquando il punto C discende girando attorno i punti B, D, mentre questi punti o cedono lateralmente, o s' alzano girando attorno i termini A, E. Apresi allora l' Arco al di dentro in c, e al di fuori in b, d; appunto come se il poligono $A\,B\,C\,D\,E$ ruinasse aprendosi l' angolo C del colmo, e chiudendosi gli angoli laterali.

Or cercheremo per ambedue queste mosse le condizioni dell' equilibrio. E prima da' centri di gravità G, O de' pezzi $B\,C$, $A\,B$ intenderemo calate le verticali $G\,R$, $O\,T$; e dai punti B, D condurremo $B\,V$, $D\,V$ perpendicolari alle sezioni $B\,b$, $D\,d$, quali sezioni prolungheremo sicchè concorrano in N.

651. *Proposizione I.* Tenda l' Arco $B\,C\,D$ a scendere verticalmente rimovendo le sezioni $B\,b$, $D\,d$. Chiamando O il peso del solido $A\,B$, e G il peso del solido $B\,C$, l' equilibrio sarà determinato da queste due equazioni

$$fO = G\left(\frac{KN}{BK} - f\right)$$

$$O.\frac{AT}{BM} = G\left(\frac{KN}{BK} - \frac{AM}{BM}\right).$$

Essendo $2\,G$ il peso dell' Arco $B\,C\,D$, inten-

deremo questo peso applicato al punto V, d' onde prema normalmente sui piani, $B\,b$, $D\,d$ spingendo secondo le rette VB, VD. Sarà la spinta orizzontale che esso esercita in B (596) $= G$ tang. BVK $= G$ cot. $BNK = G \cdot \frac{KN}{BK}$; e la spinta verticale $= G$.

Ora la prima spinta tende a rimovere orizzontalmente il solido AB, al qual moto resiste l' attrito con forza $= fG + fO$. Quindi la prima equazione.

Di più la spinta orizzontale tendendo a rovesciare lo stesso solido AB attorno l' angolo A opera col momento $G \cdot \frac{KN}{BK} \cdot BM$; cui resiste la spinta verticale G col momento $G \cdot AM$, ed il peso O col momento $O \cdot AT$. Eguagliando il momento della spinta a quelli della resistenza, e dividendo per BM si ottiene la seconda equazione.

622. *Proposizione II.* Tenda ciascuno de' due pezzi BC, DC a girare attorno il vertice dell' Arco C, rimovendo i punti B; D. L' equilibrio per questa mossa è determinato dalle due equazioni seguenti

$$fO = G\left(\frac{BR}{CK} - f\right)$$

$$O \cdot \frac{AT}{BM} = G\left(\frac{BR}{CK} - \frac{AM}{BM}\right).$$

Riguardando l'Arco siccome un poligono $ABCDE$ (650) mobile attorno i suoi angoli, compartiremo (164) i pesi G, O sugli angoli C, B, A. E, così avremo, seguendo le denominazioni dell' art. 599

scheroni assegnò poi (*) le condizioni d' equilibrio sotto la forma cha abbiamo esposta nella Proposizione II.

CAP. XII.

Della fermezza de' modelli.

656. Sperimentata la fermezza d' un modello di macchina o d' edificio, non senza molta cautela vuolsi procedere a conchiuderne la fermezza dell' edificio o della macchina stessa.

E prima convien distinguere fra le spinte che tendono semplicemente a spostare le parti, e quelle che tendono a spezzarle. Tradotto il sistema dal piccolo al grande, le prime crescono in egual proporzione colle resistenze, le seconde crescono in proporzion maggiore; ond' è che per rapporto a queste ultime, quanto è più grande la fabbrica, tanto a proporzione è più debole.

Poi fra queste azioni medesime convien distinguer tre classi: altre tendon a svellere le parti per distrazione, altre a romperle per traverso, altre a schiacciarle per compressione. Appartiene alla prima classe lo stiramento che soffrono le chiavi o le catene delle Volte, e le piane de' tetti; alla seconda il carico che tenta piegare o rompere le travi orizzontali o inclinate; alla terza il peso che aggrava verticalmente i muri e le colonne.

(*) *Nuove ricerche sull' equilibrio delle Volte*, Probl. X.

657. *Proposizione I.* Sia un lato del modello al lato omologo della costruzione come $1 : n$. La spinta che tende a distrarre, o a rompere per traverso le parti cresce dal piccolo al grande come $1 : n^3$; e la resistenza a queste rotture cresce soltanto come $1 : n^2$.

La prima asserzione è manifesta: poichè le spinte debbon crescere come i pesi delle parti che spingono, e questi crescono in ragion triplicata dei lati omologhi.

Essendo poi le dimensioni del solido modulare a, b, c, saranno quelle dello stesso solido nella fabbrica na, nb, nc. Ora la resistenza assoluta che contrasta alla forza distraente, cresce nella ragione (533) $a\,b : na\,.\,n\,b$; e la resistenza rispettiva che contrasta alla forza tendente a rompere per traverso, cresce nella ragione (541) $\frac{a^2\,b}{c} : \frac{n^2\,a^2\,.\,n\,b}{n\,c}$.
Entrambe queste ragioni si riducono a quella di $1 : n^2$.

658. *Coroll. I.* Perciò quei pezzi che a tali spinte soggiacciono avranno tanto minor fermezza nella fabbrica che non hanno nel modello, quanto sarà maggiore il numero n; il quale potrà crescere a segno che la fabbrica non possa più reggere.

659. *Coroll. II.* Adunque nel tradurre il modello di piccolo in grande non si può passare un certo limite d' ingrandimento.

Sia P il maggior peso cui possa reggere uno de' travicelli del modulo, e p quel peso o spinta che esso attualmente sostiene. Il maggior peso cui potrà reggere il trave corrispondente della fabbrica sarà $n^2\,P$, ed il peso che esso attualmente sosterrà

$n^3 p$. Dovrà dunque essere $n^3 p < n^2 P$, e tutto al più $n^3 p = n^2 P$, onde $n = \frac{P}{p}$. E questa sarà la maggior grandezza a cui quel pezzo potrà tradursi.

660. *Coroll. III.* Che se volesse pure accrescersi il modello a piacimento, conservandogli tuttavia sufficiente fermezza, sarà necessario nell' ingrandire ciascun pezzo alterare qualcuna delle sue dimensioni.

Vogliasi per esempio conservare al trave la larghezza nb, e la lunghezza nc proporzionata al modello, e si cerchi la grossezza xa opportuna perchè la sua resistenza pareggi la spinta ch' esso dovrà sostenere.

Sarà la resistenza del travicello a quella del trave come $\frac{a^2 b}{c} : \frac{x^2 a^2 . ab}{nc}$ o sia come $1 : x^2$. Quindi il trave potrà tutt'al più sostenere il peso Px^2; ma esso sosterrà infatti il peso $n^3 p$. Dunque dovrà essere per lo meno $Px^2 = n^3 p$; o sia $x = n \sqrt{\frac{np}{P}}$.

Se il trave fosse di sezione quadrata, e ritenendo la lunghezza nc si cercasse il lato xa, si troverebbe nella stessa guisa $x = n \sqrt[3]{\frac{np}{P}}$.

661. *Proposizione II.* La spinta che tende a schiacciare le parti per compressione cresce dal piccolo al grande come $1 : n^3$; e la resistenza cresce soltanto come $1 : n$.

Di fatti la resistenza alla compressione cresce nel rapporto (566) $\frac{a^2 b}{c^2} : \frac{n^2 a^2 . ab}{n^2 c^2}$ che è quello di $1 : n$.

662. *Coroll. I.* Sia dunque P il maggior carico che possa portare il muro o il pilastrino modulare e sia p il carico di cui realmente è gravato. Pel muro o colonna analoga sarà $n\,P$ il maggior peso che potrà sostenere, ed $n^3 p$ il peso che sosterrà realmente. Quindi potrà essere tutt' al più $n^3 p = n\,P$, onde $n \sqrt{\frac{P}{p}}$, massimo termine dell'ingrandimento.

663. *Coroll. II.* Che se ritenendo la lunghezza, o vogliam dire altezza $n\,c$, e la larghezza $n\,b$ volesse darsi al solido tal grossezza $x\,a$, per cui nell'ingrandirsi non indebolisca a segno di rompersi, si troverebbe come sopra (660) $x = n^2 \sqrt{\frac{p}{P}}$ per lo meno.

E trattandosi d' un pilastro a base quadrata, o d'una colonna cilindrica, cercandosi parimente il lato, o diametro $x\,a$ verrebbe $x = n \sqrt[3]{\frac{n^2 p}{P}}$.

664. *Coroll. III.* Gli esposti principj daranno norma sicura a giudicare della robustezza d'una costruzione, da prove che se ne facciano sul modello. Nel quale ove siasi esplorata la forza di ciascun pezzo, ed il limite dell' ingrandimento che esso comporta, ben si vede che nell' ingrandire tutto il modello dovrà starsi al di sotto del più piccolo fra questi limiti. E quando pur vogliasi oltrepassarlo, veggiamo come convenga alterare le misure di ciascun pezzo per conservargli conveniente fermezza.

LIBRO QUINTO

DELLE MACCHINE.

SEZIONE PRIMA

DELLE MACCHINE IN EQUILIBRIO.

CAP. I.

Della Leva.

665. Leva è una spranga rigida, mobile attorno d'un *fulcro*, e tratta in varj punti da varie forze. Le distanze delle direzioni di queste forze dal fulcro, diconsi i rispettivi *bracci di leva*.

Riguardasi specialmente nella leva il caso più semplice, che è quello d'un *peso Q* equilibrato da una *potenza P*. E la leva dicesi *di primo genere* se il fulcro è collocato fra la potenza e il peso, *di secondo genere* se il peso sta in mezzo, *di terzo genere* se sta nel mezzo la potenza.

666. *Proposizione*. Nella leva in equilibrio sta la potenza al peso in ragion reciproca de' rispettivi bracci di leva.

Sia a il braccio della potenza P, e b il braccio del peso Q; sarà nell'equilibrio $P\,a = Q\,b$.

In fatti $P\,a$, $Q\,b$ sono (103) i momenti delle forze P, Q per aggirar la leva sul fulcro, e questi per l'equilibrio debbono (105) essere uguali.

667. *Scolio I.* Questa Proposizione, che due pesi si fanno equilibrio quando le loro distanze dal fulcro sono reciprocamente proporzionali ad essi pesi, non solamente contiene la ragione e il fondamento della Leva, ma ben anche di tutte le altre Macchine, che tutte, come vedremo, ponno alla Leva ridursi. Anzi da questa Proposizione, come da universale principio può tutta la Statica derivarsi. La verità di essa fu conosciuta da' più antichi meccanici, ma il primo a dimostrarla fu Archimede, la di cui dimostrazione indipendente da ogni altro principio di Meccanica procede a un di presso in questo modo (*).

Sia la Leva XZ (Fig. 51) divisa per metà dal fulcro F, e carica di pesi uniformemente distribuiti per tutta la sua lunghezza. È evidente che questa sarà in equilibrio.

Ora preso nella Leva un punto qualunque L, tutti i pesi uniformemente distribuiti sulla porzione XL si riuniscano in un sol peso P posto in A, punto di mezzo della XL. E similmente tutti i pesi uniformemente distribuiti sopra la LZ si raccolgono in un solo peso Q posto in B, punto di mezzo della LZ. È pure chiaro che l'equilibrio sussisterà.

Sarà dunque $P : Q :: XL : LZ$. Ma abbiamo

$$XL = XZ - LZ = 2FZ - 2BZ = 2BF$$
$$LZ = XZ - LX = 2FX - 2AX = 2AF$$

Dunque $P : Q :: BF : AF$. Il che ec.

(*) *V.* Galileo, *Opere*, Tom. III, pag. 63.

668. *Scolio II.* Alcuni oppongono a questa dimostrazione, che l' equipollenza di più pesi uniformemente compartiti sopra una linea ad un peso solo eguale alla loro somma e posto nel punto di mezzo della medesima, non è assunto così evidente che non abbia d' uopo di dimostrazione esso pure. Tuttavia è facile il convincersi (*) che il peso Q posto in B equivale per esempio a due pesi q, q, ciascuno la metà di Q, posti ne' punti L, Z, equidistanti da B. Poichè si prenda $Zf = LF$, ed immaginando che in f siavi un altro appoggio; egli è evidente che o sia in B il peso Q, o siano in L, Z i pesi q, q, in amendue i casi quest' appoggio f porterà la metà del peso Q. Laonde rimosso quest' appoggio si richiederà in f la stessa forza per equilibrare il peso Q, che per equilibrare i due pesi q, q. Onde ec.

669. *Coroll. I.* Se le forze sono parallele, nel primo genere di leva la potenza può essere maggiore o minore del peso; ma nel secondo genere la potenza è sempre minore del peso, e nel terzo è sempre maggiore.

670. *Coroll. II.* Volendosi tener conto del peso proprio V della leva, sarà questo una terza forza che opera sulla leva, ed il suo braccio sarà la distanza del fulcro del centro di gravità della leva stessa. Sia c questo braccio. Sarà l'equazione dell' equilibrio $Pa \pm Vc = Qb$, secondo che il peso V tende a girare la leva nel senso della potenza P, o al contrario.

(*) Vince, *Phil. Transact.* 1794.

671 *Coroll. III.* Allungando la leva di secondo genere, se per una parte s' avvantaggia la potenza accrescendosi il braccio a, per l' altra si scapita, venendo a crescere il momento Vc. Di qui il problema. Dato il peso Q ed il suo braccio b, e dato il peso g della leva sulla lunghezza 1, trovare la lunghezza a della leva, che dia il maggior vantaggio alla potenza.

Avremo $V = ga$, e $c = \frac{1}{2} a$. Quindi per l' equilibrio sarà

$$Pa - \frac{1}{2} g a^2 = Qb, \text{ onde } P = \frac{1}{2} g a + \frac{Qb}{a}.$$

Affinchè P riesca minimo, si farà $dP = 0$, onde avrassi $a = \sqrt{\frac{2Qb}{g}}$.

672. *Coroll. IV.* Il fulcro così sostiene lo sforzo delle potenze P, Q, V come se gli fossero immediatamente applicate (128).

673. *Scolio.* Qualunque poi sia il numero e la direzione delle forze applicate, e qualunque sia il modo col quale la leva si connette col fulcro, le proprietà dell' equilibrio e le pressioni sostenute dal punto d' appoggio si dovranno dedurre dalle condizioni d' equilibrio d' un sistema di forma invariabile. Per il che rimettiamo ai Capi XVI. e XVII. del Libro primo.

Rimetteremo similmente agli ultimi Capi del terzo Libro perciò che spetta al vedere che il fulcro e la leva stessa siano abbastanza robusti per reggere agli sforzi delle potenze. La qual osservazione vuol farsi anche nelle altre macchine che successivamente andremo considerando.

CAP. II.

Della Bilancia.

674. PROPOSIZIONE *I.* Nella bilancia due pesi eguali, qualunque siano, collocati uno per parte, debbono equilibrarsi fra loro. Al qual effetto richiedesi 1.° che la bilancia anche scarica de' pesi conservi l'equilibrio; 2.° che le due braccia siano d'uguale lunghezza.

Dim. Siano M, N i momenti delle due parti della bilancia scarica; a, b le lunghezze de' due bracci; P, P i pesi che si equilibrano. Dovrà essere $M + Pa = N + Pb$; onde $P(b - a) = M - N$. La qual equazione dovendo verificarsi qualunque siasi il valore di P, non può non essere $M = N$, $a = b$.

675. *Scolio I.* La bilancia è falsa se manchi d'alcuna delle due accennate condizioni, ma con tutto ciò può servire a determinar giustamente il peso. Poichè il primo difetto si corregge facilmente equilibrando la bilancia scarica coll' aggiungervi nell' un de' piatti quel peso che la riduca all' equilibrio. Al secondo poi si supplisce pesando il corpo prima nell' uno, poi nell' altro piatto; il suo giusto peso sarà medio proporzionale fra quelli dei due marchi che hanno servito ad equilibrarlo.

Poichè se il peso P posto successivamente nei due piatti viene equilibrato dai marchi Q, Q', sarà $Pa = Qb$, $Pb = Q'a$; onde $PP = QQ'$.

676. *Scolio II.* Havvi eziandio un altro modo di servirsi d'una bilancia falsa per riconoscere esatta-

mente l'eguaglianza di due pesi. E questo è il collocare successivamente i due pesi nello stesso piatto della bilancia, equilibrandoli con un medesimo marco collocato nell' altro piatto. Se i due pesi nelle due successive pesate hanno fatto equilibrio allo stesso contrappeso, essi sono necessariamente eguali fra loro.

Sia il primo peso P, e questo s' equilibri col marco Q. Non potremo conchiudere che sia $P = Q$ perchè per ipotesi non siamo sicuri della giustezza della bilancia. Sia il secondo peso P', e questo pure s' equilibri collo stesso marco Q; anche qui per lo stesso motivo non potremo dire che sia $P' = Q$. Ma bensì potremo con certezza affermare $P = P'$. Poichè questi due pesi facendo equilibrio collo stesso marco Q nelle medesime circostanze, non ponno non essere uguali.

Essendo fisicamente impossibile l'assicurarsi coll' ultima precisione della perfetta uguaglianza delle lunghezze de' bracci a, b e de' momenti M, N, sarà sempre bene adoperar questo metodo delle doppie pesate quando si voglia scrupolosamente accertare l' uguaglianza di due pesi.

677. *Scolio III.* La squisitezza della bilancia, e la comodità del maneggiarla esigono altre condizioni. Si vuole in primo luogo che per ogni menoma disuguaglianza de' due pesi l' ago della bilancia lentamente s' inclini fermandosi in una situazione obbliqua all' orizzonte, senza però che del tutto trabocchi. Si vuole di più che se la bilancia è equilibrata, e l' ago venga causalmente a piegarsi, esso non si fermi in quella situazione inclinata,

ne trabocchi, ma lentamente si riconduca alla situazione orizzontale.

L' adempimento di queste condizioni dipende soprattutto dalla situazione rispettiva de' tre punti O, C, G (Fig. 52) de' quali O è il centro del moto, G è il centro di gravità del giogo della bilancia, C è il punto dove l' orizzontale AB che unisce i punti di sospensione dei due piatti incontra la verticale OG. Le due Proposizioni seguenti daranno lume a determinare la situazione di questi punti nel modo più acconcio.

678. *Proposizione II.* Rompendosi l' equilibrio nella bilancia per la giunta d' un peso menomo p ad uno de' pesi eguali P, P che in essa si librano, determinare l' inclinazione che ne seguirà nell' ago della bilancia.

Ponghiamo che accrescendosi il pesetto p al peso P pendente dal punto B, passi il giogo nella situazione aOb, e chiamiamo l' angolo $AOa = BOb = GOg = \psi$; l' angolo $AOC = BOC = \alpha$. Si conducano dai punti a, b, g le perpendicolari ah, bk, gi sopra la OG, e si chiami M il peso del giogo. Essendo la bilancia in equilibrio nella situazione aOb, dovrà essere

$$P \,.\, ah + M \,.\, gi = (P+p)\, bk$$

Ora abbiamo

$$ah = AO \sin.(\alpha+\psi) = AO \sin.\alpha \cos.\psi + AO \sin.\psi \cos.\alpha$$
$$= AC \cos.\psi + OC \sin.\psi$$
$$bk = AO \sin.(\alpha-\psi) = AO \sin.\alpha \cos.\psi - AO \sin.\psi \cos.\alpha$$
$$= AC \cos.\psi - OC \sin.\psi$$
$$gi = OG \sin.\psi$$

Fatta la sostituzione nell' equazione dell' equilibrio, se ne ricaverà

$$\text{tang.}\ \psi = \frac{p.AC}{(2P = p)\ OC + M.OG}$$

Se dicasi M' il peso della bilancia carica, onde $M' = M + 2Pp$, avremo più brevemente

$$\text{tang.}\ \psi = \frac{p.AC}{M'.OC + M.CG}$$

679. *Coroll. I.* Sarà dunque la bilancia tanto più mobile, quanto più lunghe saranno le sue braccia; quanto più saranno vicini tra loro i tre punti O, C, G; e quanto meno sarà caricata.

680. *Coroll. II.* Se fosse $OC = 0$, verrebbe $\text{tang.}\ \psi = \frac{p.AC}{M.CG}$; ed allora l'agilità della bilancia è la stessa sotto qualunque carico.

681. *Coroll. III.* Se fosse insieme $OC = 0$, e $CG = 0$, cosicchè i tre punti O, C, G coincidessero, verrebbe tang. ψ infinita, ed allora per ogni menomo disequilibrio l'ago della bilancia traboccherebbe d'un quarto di cerchio e si farebbe verticale. Che se OC e CG fossero negative, tang. ψ sarebbe negativa e l'ago traboccando trascorrerebbe oltre il quarto di cerchio. Ognun vede che queste costituzioni sarebbero viziose.

682. *Proposizione III.* Inclinandosi con angolo ψ l'ago d'una bilancia perfettamente equilibrata, ritrovare la forza colla quale il giogo tende a rimettersi nella situazione dell'equilibrio.

Sia S il momento d'inerzia della bilancia carica relativamente all'asse del moto; la forza acceleratrice colla quale il giogo tenderà a rotare nel senso $aAbB$ per rimettersi nella situazione AOB sarà (341) $= \frac{P.ah - P:bk + M.gi}{S}$. Sostituen-

do i valori (678) delle ah, bk, gi si troverà la cercata forza

$$=\frac{\sin.\psi}{S}(2P.OC+M.OG)=\frac{\sin.\psi}{S}(M'.OC+M.CG).$$

Si noti che nel computare il momento d' inerzia S, le masse dei due pesi P, P che pendono liberamente da' punti A, B deggiono intendersi concentrate in essi punti.

683. *Corollario.* Se $OC=CG=0$, la forza restituente è nulla; allora la bilancia è *pigra*, anzi s' arresta del tutto, essendo l' ago indifferente a fermarsi in qualunque situazione. Che se OC e CG fossero negative, la forza restituente è negativa; allora la bilancia è *folle*, giacchè per ogni minima inclinazione del giogo, invece di rimettersi nella situazione dell' equilibrio, se ne allontana, e trabocca.

CAP. III.

Altre maniere e combinazioni di Leve.

684. *Proposizione I.* Nella Stadera, se il braccio più lungo dividasi in parti eguali, e il marco percorra successivamente ciascuna divisione, esso farà equilibrio a dei pesi crescenti in progressione aritmetica.

Sia a il braccio più corto; b, b', b'' ec. i successivi bracci di leva del marco Q; P, P', P'' ec. i pesi cui fa equilibrio; Vc il momento del peso della stadera. Avremo successivamente

$$Pa=Qb+Vc;\quad P'a=Qb'+Vc;$$
$$P''a=Qb''+Vc \text{ ec.}$$

ove se b, b', b'' ec. sono in serie aritmetica, si vede che debbon esservi ancora P, P', P'' ec. Di qui riesce agevolissima la graduazione della stadera.

685. *Proposizione II.* Se la potenza equilibra il peso per via di più leve, l'una agente sull'altra, sta la potenza al peso come il prodotto di tutte le braccia di leva poste dalla parte della potenza, al prodotto di tutte le braccia di leva poste dalla parte del peso.

Siano tre leve, e sia X la forza che fa la prima leva sull'estremità della seconda, Y la forza che fa la seconda sull'estremità della terza; e segniamo con lettere accentate i bracci corrispondenti nella seconda leva, con due accenti quei della terza. Sarà

$$Pa = Xb\,; \quad Xa' = Yb'\,; \quad Ya'' = Qb''$$

onde

$$Paa'a'' = Qbb'b''.$$

686. *Proposizione III.* Determinare le condizioni dell' equilibrio nel ponte levatojo.

Nel ponte levatojo espresso in profilo dalla Fig. 53 si riuniscono due leve, l'una di primo, l'altra di secondo genere. AB è il tavolato del ponte mobile attorno il fulcro A, ed ha l'estremità B congiunta per mezzo della catena BC coll'estremo C della leva KDC mobile attorno il fulcro D.

Se le due leve AB, KDC agissero immediatamente l'una sull' altra, la condizione dell' equilibrio si avrebbe tosto dalla Proposizione precedente: ma conviene aver riguardo al peso ed alla situazione della catena BC. Noi chiameremo X la tensione della catena, ed esprimendo colle lettere segnate

nella figura i pesi de' lati AB, BC, DC, DK compartiremo ciascuno di questi pesi sui punti d' appoggio, e sulle estremità de' lati. Ed è palese che il punto B resterà gravato del peso $T+B$, il punto C del peso $Q+R$; il punto K del peso P.

Posto ciò, pei punti A, D si conducano le perpendicolari AG, DF sulla BC, e le orizzontali AH, LO; e pei punti B, C, K si conducano le verticali BH, CO, KL. Or si vede che nella leva AB il peso $T+R$ col braccio AH equilibra la tensione X col braccio AG; e nella leva KDC il peso P col braccio DL equilibra il peso $Q+R$ col braccio DO, e la tensione X col braccio DF. Sarà dunque

$$(T+R)\,AH = X \,.\, AG$$

$$P \,.\, DL = (Q+R)\,DO + X \,.\, DF$$

Dalle quali due equazioni eliminando X si avrà la condizione d' equilibrio ricercata.

667. *Corollario.* Se il quadrilatero $ABCD$ è parallelogrammo, riesce

$$P \,.\, DK = (T+Q+2R)\,AB$$

Determinato per mezzo di questa equazione il peso P, esso terrà in equilibrio il ponte levatojo in qualunque situazione.

688. *Scolio.* Curvandosi la catena BC pel proprio peso, essa non si stende in linea retta, come abbiam supposto, ma ciò non fa gran divario.

Abbiamo anche supposto che i pesi che gravano i lati siano distribuiti in modo da poterli considerare come raccolti nel loro punto di mezzo. Ma è facile lo scorgere come debbansi cangiare le condizioni d' equilibrio se i pesi siano diversamente distribuiti.

CAP. IV.

Dell' Asse nella Ruota.

689. Qui (Fig. 54) la potenza P è applicata alla periferia d'una ruota, e il peso Q pende da una fune avvolta ad un cilindro che gira insieme colla ruota.

Talvolta il cilindro non sostiene immediatamente il peso; ma (Fig. 55) move colle sue pinne una ruota dentata, ed il cilindro o rocchetto di questa ne aggira similmente un'altra, e così sino all' ultima, il cilindro della quale porta il peso Q. E queste sono le *Ruote dentate*, le quali, come è palese, sono sistemi di più assi nella ruota, che agiscono l' uno sull' altro.

690. *Proposizione I.* Nell'equilibrio dell'Asse nella ruota sta la potenza al peso come sta il raggio del cilindro a quello della ruota.

Sia il raggio della ruota a, quello del cilindro b; sarà per l'equilibrio $Pa = Qb$.

Ciò segue dall'art. 105; e altronde è chiarissimo che questa macchina riducesi alla leva di primo genere.

691. *Proposizione II.* Se la potenza equilibra il peso mediante un sistema di ruote dentate (Fig. 55) starà la potenza al peso come sta il prodotto de' raggi de' rocchetti al prodotto de' raggi delle ruote.

Si dimostra come all'art. 685.

692. *Scolio.* Se il peso Q discende facendo girare il sistema, spesse volte v' ha bisogno di sapere

quanti giri farà l' ultima ruota C nel tempo che la prima A compie il suo giro. Or questa cognizione dipende da quella del numero dei denti di ciascuna ruota A, B, e delle pinne di ciascun rocchetto b, c. Non si mette in conto nè l'. ultima ruota, nè il primo rocchetto, perchè questi non sono dentati, o almeno nulla monta che lo siano.

Siano A, B i numeri de' denti delle ruote A, B, e b, c i numeri delle pinne de' rocchetti b, c. E mentre la ruota A fa giri N, supponghiamo che il rocchetto b colla sua ruota B faccia giri N', ed il rocchetto c colla sua ruota C faccia giri N''. È manifesto che quanto una ruota ha più denti che non ha pinne il rocchetto contiguo, tanto meno giri farà nello stesso tempo la prima, che non fa il secondo. Sarà dunque

$$A : b :: N' : N; \quad \text{e} \quad B : c :: N'' : N'$$

onde $$N : N'' :: bc : AB.$$

693. *Corollario.* Di qui dipende la soluzione di questo Problema: in un dato sistema di ruote dentate, fissare il numero dei denti delle ruote, e delle pinne de' rocchetti in guisa che i numeri de' giri contemporanei fatti dalle ruote estreme siano in un dato rapporto.

CAP. V.

Della Troclea, e della Taglia.

694. Nella *Troclea fissa* il centro è fermato ad un appoggio stabile, e la potenza ed il peso sono applicati ai due capi della fune che abbraccia,

la Troclea. Nella *Troclea mobile* il peso pende dal centro, l' un capo della fune è fisso, l' altro vien tratto dalla potenza.

Nella *Taglia* v' ha un sistema di troclee fisse collegate in una cassa o armatura comune, ed un altro di troclee mobili pur collegate insieme colla sua cassa, alla quale s' attacca il peso. Una fune abbraccia col suo giro tutte le troclee; l' un de' suoi capi è fermato ad un punto del sistema; l' altro capo uscendo fuori dall' una delle troclee fisse, vien tratto dalla potenza.

Si uniscono talvolta più troclee mobili, o più taglie cosicchè l' una agisca sull' altra; e queste sono le *Troclee* o *Taglie composte*.

È palese che la troclea fissa viene ad essere una leva di primo genere e di braccia eguali, sicchè non avvantaggia punto la potenza, e giova solo a cangiarne la direzione. Ma la troclea mobile si riduce ad una leva di secondo genere, come tosto vedremo.

695. *Proposizione I.* Nella troclea mobile in equilibrio (Fig. 56) i due tratti della fune declinano egualmente dalla verticale; e sta la potenza P al peso Q come sta il raggio al doppio coseno di questa declinazione; o sia come sta il raggio della troclea alla corda dell' Arco abbracciato dalla fune.

Venendo in contrasto il peso Q colle tensioni dei due tratti dalla fune PA, EB, è forza che le due tangenti PA, EB prolungate concorrano in un punto X della verticale condotta pel centro della troclea. Quindi gli angoli AXC, BXC riescono eguali: ed è (148)

$$P : Q :: 1 : 2 \cos. AXC :: 1 : 2 \cos. CAD :: AC : AB.$$

Si perviene alla stessa proporzione riguardando la troclea mobile con una leva di secondo genere, nella quale la potenza P tende a sollevare la troclea facendola girare attorno il punto B, mentre il peso Q tende ad aggirarla in contrario. Condotta BF perpendicolare a PA, il momento della potenza $P \cdot BF$ deve eguagliare il momento del peso $Q \cdot BD$. Adunque $P : Q :: BD : BF$, o sia pei triangoli simili BAF, ADC, come AC ad AB.

696. *Corollario.* La troclea mobile giova alla potenza sintantochè l' angolo AXC sta sotto dei 60 gradi; oltre quel termine è svantaggiosa. Se i due tratti della fune sono paralleli, la potenza è la metà del peso. E questo è il maggior vantaggio che possa aversi dalla Troclea.

697. *Proposizione II.* Nella Taglia in equilibrio (Fig 57) i tratti della fune che sostengono le troclee mobili declinano dalla verticale in guisa, che la somma de' seni di queste declinazioni sia zero; ed allora sta la potenza al peso, come sta il raggio alla somma de' coseni delle suddette declinazioni.

In fatti le tensioni de' suddetti tratti della fune saranno tutte eguali fra loro (176) e risolvendo ciascuna d' esse in due forze, l' una orizzontale, l' altra verticale, e le forze orizzontali dovranno equilibrarsi fra loro, le forze verticali dovranno equilibrarsi col peso Q. Ora prendendo per raggio comune la retta che esprime la tensione della fune, le prime vengono espresse da' seni delle rispettive declinazioni, e le seconde da' loro coseni. Dunque la somma de' seni dovrà annullarsi, e la somma

de' coseni dovrà eguagliarsi al peso *Q*. Starà dunque la tension della fune, o sia la potenza *P* al peso *Q* come sta il raggio alla somma de' coseni ec.

698. *Corollario.* Se le funi sono parallele, sta la potenza al peso, come l' unità al numero de' tratti di fune che tirano la taglia mobile. E questa è la più vantaggiosa disposizione della taglia.

699. *Proposizione III.* In un sistema di troclee mobili l' una agente sull' altra (Fig. 58) sta la potenza al peso, come sta il prodotto de' raggi delle troclee al prodotto delle corde degli Archi abbracciati dalla fune in ciascuna troclea.

Si dimostra come all' art. 685.

700. *Corollario.* Se tutte le funi sono parallele, che è la disposizione più vantaggiosa, sta la potenza al peso come $1 : 2^n$, essendo n il numero delle troclee.

701. *Scolio.* Più Taglie ancora ponno combinarsi in guisa che agiscano l' una sull' altra, essendo applicata la potenza alla prima di essa, ed il peso all' ultima. Qui pure il rapporto della potenza al peso sarà composto dei rapporti che hanno luogo per ciascuna delle Taglie.

CAP. VI.

Del Piano inclinato.

702. PROPOSIZIONE. Se la potenza *P* equilibra il peso *Q* posto su d' un piano inclinato, sta la potenza al peso, come sta il coseno dell' inclina-

zione del piano alla verticale, al coseno dell' inclinazione della potenza al piano stesso.

Sia l'angolo del piano colla verticale $= m$; l'angolo della direzione della potenza col piano $= n$. Sarà l'equazione dell'equilibrio

$$P = Q \frac{\cos. m}{\cos. n}.$$

In fatti risolvendo ciascuna delle forze P, Q in due, l'una parallela al piano, l'altra ad esso normale, le forze parallele al piano riescono $P \cos. n$, $Q \cos. m$; e le forze normali riescono $P \sin. n$, $Q \sin. m$. Ora queste ultime sono elise dal piano stesso, il quale ne risulta premuto con forza $= P \sin. n + Q \sin. m$. Le prime poi deggiono elidersi fra loro, onde $P \cos. n = Q \cos. m$.

703. *Corollario.* Traendo la potenza orizzontalmente, l'angolo n diviene complemento dell'angolo m, onde $P = Q \cot. m$. E però la potenza sta al peso, come sta l'altezza del piano alla base.

Traendo poi la potenza con direzione parallela al piano, l'angolo n si fa nullo, onde $P = Q \cos. m$. E però la potenza sta al peso, come sta l'altezza del piano alla lunghezza; e questo è il massimo vantaggio che possa darne il piano inclinato.

704. *Scolio.* Abbiamo detto (667) che il principio della leva rende ragione dell' equilibrio in tutte le altre macchine, le quali per ciò ponno tutte alla leva ridursi. Questa riduzione è manifesta nell' asse nella ruota, e nella troclea; nel piano inclinato è meno palese. Per dichiararla prenderemo a dimostrare la Proposizione (702) mediante il principio della leva.

Intendasi un circolo AFB (Fig. 59); sia il diametro AB orizzontale, e CF un semidiametro inclinato ad AB coll' angolo $FCB = m$. Per F si conduca la tangente RT, e la secante PS inclinata alla RT coll' angolo $PFR = n$. Dal punto F si cali FM perpendicolare sopra CB, e da C si cali CN perpendicolare sopra PS. E sarà l' angolo $FCM = MFT = m$; e l'angolo $FCN = PFR = n$.

Ciò fatto intendasi che CF sia una leva mobile intorno a C, e nel termine F sia applicata una potenza P che agisca secondo la retta FP, ed un peso Q che agirà secondo la verticale FM. Pel principio della leva (666) vi sarà equilibrio quando sia

$$P : Q :: CM : CN :: CF \cos. m : CF \cos. n :: \cos. m : \cos. n.$$

Ora il peso Q posto in F tende a discendere per l' arco del cerchio, o sia per la tangente, nella stessa maniera come se fosse posto sul piano RT declinante dalla verticale coll' angolo $MFT = m$. E la potenza P agisce nella direzione FP che fa col piano inclinato l' angolo $PFR = n$. Dunque allorchè un peso Q posto sopra un piano inclinato alla verticale coll' angolo m è equilibrato da una potenza P inclinata al piano stesso coll' angolo n, hassi $P : Q :: \cos. m : \cos. n$, il che ec.

CAP. VII.

Della Vite, e del Cuneo.

705. *Elice* è una curva descritta nella superficie d' un cilindro retto con inclinazione costante al

stituisca una potenza X che agisca sul punto B. Sarà (107) $P:X::cB:cA$, o ancora

$$P:X::2\pi b:2\pi a.$$

Ora questa X è una potenza orizzontale che sostiene il peso Q, mentre esso tende a scendere per un piano inclinato in guisa (705) che sta l'altezza alla base, come sta h a $2\pi b$. Dunque (703)

$$X:Q::h:2\pi b.$$

Moltiplicando le due proporzioni si ha

$$P:Q::h\,2\pi a$$

e $P=\frac{Qh}{2\pi a}$, equazione dell'equilibrio.

Quindi è manifesto esser la vite una macchina composta della leva di secondo genere, e del piano inclinato.

708. *Scolio I.* La stessa condizione dell'equilibrio ha luogo ancorchè l'asse della vite non sia posto verticalmente, purchè però le resistenza Q agisca secondo l'asse della vite, e la potenza P agisca secondo la tangente d'un circolo perpendicolare al detto asse. In caso diverso converrà decomporre queste due forze, e considerarne soltanto quelle componenti che agiscono nelle direzioni accennate. Le altre restano elise dagli appoggi.

709. *Scolio II.* Accrescendosi la potenza P oltre il valore richiesto per l'equilibrio, cosicchè sollevi la testa della vite, mentre ella fa un giro intero, la testa della vite s'alza di tanto spazio quanto è il passo dell'elice. Di qui l'uso della vite a strettissime spire per misurare i movimenti piccolissimi.

610. *Proposizione II.* Nell'equilibrio della vite perpetua sta la potenza al peso, come sta il pro-

lato del cilindro. La distanza fra due punti consecutivi dell'elice presi sullo stesso lato, dicesi *passo dell' elice*.

Svolgasi la superficie del cilindro $A\,C$ (Fig. 60) nel rettangolo $a\,c$, nel quale si segnino le parallele $a\,h'$, $h\,k'$ ec. Rivolgendo questo rettangolo attorno la superficie del cilindro, vi resterà segnata l' elice. Onde è manifesto che ogni elemento dell' elice è una retta inclinata in modo che sta l' altezza alla base, come sta il passo dell' elice alla periferia della base del cilindro.

706. *Vite* (Fig. 61) è un cilindro retto guernito d' un risalto avente per asse un elice. Essa si aggira dentro un cilindro stabile M, che dicesi *Madrevite*, avente un incavo spirale che corrisponde al risalto della vite. La potenza P per mezzo del manubrio $A\,B$ tiene in equilibrio la vita gravata nella cima del peso Q, la quale tende a discendere ravvolgendosi per le spirre della madrevite.

Talvolta la vite è fermata stabilmente, e attorno di essa può girare la madrevite; alla quale allora sono applicate entrambe le potenze Q, P.

Formasi una macchina composta della vite e dell' asse nella ruota, allorquando la vite non sostiene immediatamente il peso, ma spinge il dente d' una ruota (Fig. 62) dal cui cilindro pende il peso Q. E questa dicesi *Vite perpetua*.

707. *Proposizione I.* Nella vite in equilibrio sta la potenza al peso, come sta il passo dell' elice alla periferia che la potenza tende a descrivere.

Sia il passo dell' elice $= h$, e sia $c\,A = a$, $c\,B = b$. Alla potenza P che agisce in A si so-

stituisca una potenza X che agisca sul punto B. Sarà (107) $P : X :: cB : cA$, o ancora

$$P : X :: 2\pi b : 2\pi a.$$

Ora questa X è una potenza orizzontale che sostiene il peso Q, mentre esso tende a scendere per un piano inclinato in guisa (705) che sta l'altezza alla base, come sta h a $2\pi b$. Dunque (703)

$$X : Q :: h : 2\pi b.$$

Moltiplicando le due proporzioni si ha

$$P : Q :: h\ 2\pi a$$

e $P = \frac{Q h}{2\pi a}$, equazione dell'equilibrio.

Quindi è manifesto esser la vite una macchina composta della leva di secondo genere, e del piano inclinato.

708. *Scolio I.* La stessa condizione dell'equilibrio ha luogo ancorchè l'asse della vite non sia posto verticalmente, purchè però le resistenza Q agisca secondo l'asse della vite, e la potenza P agisca secondo la tangente d'un circolo perpendicolare al detto asse. In caso diverso converrà decomporre queste due forze, e considerarne soltanto quelle componenti che agiscono nelle direzioni accennate. Le altre restano elise dagli appoggi.

709. *Scolio II.* Accrescendosi la potenza P oltre il valore richiesto per l'equilibrio, cosicchè sollevi la testa della vite, mentre ella fa un giro intero, la testa della vite s'alza di tanto spazio quanto è il passo dell'elice. Di qui l'uso della vite a strettissime spire per misurare i movimenti piccolissimi.

610. *Proposizione II.* Nell'equilibrio della vite perpetua sta la potenza al peso, come sta il pro-

sione in $m = T + dT$, e la pressione sull'archetto Mm sia $= Nds$. Levando via l'elemento Mm della curva, e sostituendovi una forza $OZ = Nds$, è manifesto che sussisterebbe ancora l'equilibrio tra le due forze prossimamente eguali T, $T + dT$, e la forza Nds che fa con esse angoli eguali. Sarà dunque (148) $T = \frac{Nds}{2 \cos. KOM}$. Ora riguardando KOM come un triangolo rettangolo in M, sarà $\cos. KOM = \frac{MO}{KO} = \frac{ds}{2r}$. Dunque $T = Er$.

Di più chiamando f il coefficente dell'attrito, sarà $dT = \pm fNds$. Dividendo quest' equazione per la precedente, avremo

$$\frac{dT}{T} = \pm \frac{fds}{r}.$$

Nell' integrare si determinerà la costante in guisa che $s = 0$ renda $T = Q$; poi si compirà l' integrale col porre $s = a$, e $T = P$.

714. *Coroll. I.* Sia EOR un Arco di cerchio, onde r costante. L' equazione dello stato prossimo al moto riuscirà

$$P = Qe^{\pm \frac{fa}{r}}$$

715. *Coroll. II.* Supponghiamo che la fune avvolta attorno ad un cilindro abbracci la metà della circonferenza, onde sia $\frac{a}{r} = \pi$; e supponghiamo $f = 0,35$. Riuscirà prossimamente $e^{\frac{fa}{r}} = 3$. Quin-

li nello stato prossimo al moto massimo valore di P sarà $P=3Q$, ed il minimo $P=\frac{1}{3}Q$.

Che se la fune desse una volta e mezzo attorno al cilindro, i valori riuscirebbero

$$P=27Q;\quad P=\frac{1}{27}Q$$

E se girasse due volte e mezzo

$$P=243Q;\quad P=\frac{1}{243}Q$$

E così ad ogni giro di più il valor di P dovrebbe accrescersi nove volte tanto, per giugnere a sollevare il peso, e potrebbe scemarsi nove volte per sostenerlo semplicemente.

Di qui si vede qual forza enorme si ricerchi per alzare il peso mediante una fune che con molte spirre abbracci un cilindro immobile, e qual picciola forza sia bastante ad impedire la discesa del peso.

CAP. IX.

Applicazione alla Leva, ed all' Asse nella Ruota.

716. PROPOSIZIONE I. *Nella leva mobile attorno un' asse, e tratta da forze parallele P, Q agenti coi bracci a, b; chiamando r il raggio dell' asse, l'equazione dello stato prossimo al moto sarà*

$$Pa=Qb+\frac{fr(P+Q)}{\sqrt{(1+f^2)}}.$$

Sia la potenza P (Fig. 65) sul punto di sollevare il peso Q; la risultante $E.R$ delle due forze

P, Q, eguale alla loro somma, risolvasi nella tangenziale ES, e nella normale ET. Detto l'angolo $RES = m$, sarà $ES = (P+Q)$ cos. m, ed $ET = (P+Q)$ sin. m. Ora invece delle due potenze P, Q avendosi le due ES, ET, si richiederà per lo stato prossimo al moto, che la prima di queste sia precisamente eguale all' attrito; onde $ES = f \cdot ET$, o sia cos. $m = f$ sin. m; e però sin. $m = \frac{1}{\sqrt{(1+f^2)}}$, ed $ES = f \cdot ET = \frac{f(P+Q)}{\sqrt{(1+f^2)}}$, e questo sarà il valor dell' attrito.

Avendosi adesso le due potenze P, Q, e la resistenza $\frac{f(P+Q)}{\sqrt{(1+f^2)}}$, ed operando queste tre forze coi bracci di leva a, b, r, egli è chiaro (712) che per lo stato prossimo al moto ne risulta l'equazione di sopra annunciata.

717. *Coroll. I.* Il coefficiente f ordinariamente è sì piccolo da potersi trascurare f^2, onde l'equazione più semplice

$$Pa = Qb + (P+P)fr$$

o sia

$$P = Q \cdot \frac{b+fr}{a-fr}.$$

718. *Coroll. II.* Se le potenze P, Q, non sono parallele, ma concorrono con angolo θ, invece del binomio $P+Q$ dovrà porsi nelle equazioni precedenti il valore della risultante, che sarà (24) $= \sqrt{(P^2 + 2PQ\cos.\theta + Q^2)}$.

719. *Coroll. III.* Se più leve v. g. tre agiscano l' una sull' altra, denominando e procedendo come all' art. 685 avremo le equazioni

$$Pa = Xb + (P + X)fr$$
$$Xa' = Yb' + (X + Y)fr'$$
$$Ya'' = Qb'' + (Y + Q)fr'';$$

onde eliminando X ed Y viene

$$P = Q \cdot \frac{b + fr}{a - fr} \cdot \frac{b' + fr'}{a' - fr'} \cdot \frac{b'' + fr''}{a'' - fr''}$$

Se $a = a' = a''$; $b = b' = b''$; $r = r' = r''$; sarà

$$P = Q \left(\frac{b + fr}{a - fr} \right)^n$$

essendo n il numero delle leve.

720. *Proposizione II.* Per l' asse nella ruota, se le potenze P, Q siano parallele, e sia a il raggio della ruota, b quello del cilindro, r quello dell' asse di rotazione, l' equazione dello stato prossimo al moto, avendo riguardo all' attrito, ed alla rigidezza della fune, sarà

$$Pa = Qb + (P + Q)fr + b(\mu + \nu Q)$$

Qui l' ultimo termine viene dalla rigidezza della fune, la qual resistenza si esprime (524) per $\mu + \nu Q$, ed agisce col braccio b. Del resto l' equazione ricavasi come qui sopra (717).

Se si combinano più assai nella ruota, chiamando X la forza che fa il primo contro il secondo, Y quella del secondo contro il terzo ec. si formerà per ciascheduno la sua equazione, procedendosi come nell' articolo precedente.

721. *Scolio I.* Quando la potenza P non è applicata ad un punto solo della circonferenza della ruota, ma distribuita a più punti diametralmente fra loro opposti, siccome per lo più avviene nell' Argano, allora essa potenza non influisce punto sull'attrito, e l' equazion diventa

$$Pa = Q(b + fr) + b(\mu + \nu Q).$$

722. *Scolio II.* Servono tutte queste equazioni a quello stato nel quale la potenza è prossima a sollevare il peso; che se volessero adattarsi allo stato nel quale il peso stia per superare la potenza, basterebbe cangiare il segno ai coefficienti delle resistenze f, μ, ν. Il che dovrà pure avvertirsi nelle applicazioni susseguenti.

CAP. X.

Applicazione alle Ruote dentate.

723. Quando la potenza vuol sollevare il peso per via d'un sistema di ruote dentate, non è da trascurarsi l'attrito che fa il dente di ciascuna ruota soffregandosi alla pinna del rocchetto, o al fuso della lanterna ch'ei mena in giro.

724. *Proposizione I.* La potenza P (Fig. 66) col braccio di leva AK move una ruota R, il di cui dente spingendo il fuso della lanterna o rocchetto D conduce in giro essa lanterna ed insieme il cilindro B dalla di cui circonferenza pende il peso Q. Nello stato prossimo al moto cercasi il valore della potenza P, considerando l'attrito del dente contro del fuso, e prescindendo per ora da tutte le altre resistenze.

Sia D il punto di contatto tra il dente e il fuso; si conducono le rette AD, BD e prolungata la BD verso E sia l'angolo $ADE = y$. Sia $DZ = X$ quella potenza che si dovrebbe applicare nel punto D perpendicolarmente alla BD affinchè fosse sul punto di sollevare il peso Q.

Giacchè prescindiamo dall' attrito dell' asse B, e dalla rigidezza della fune, sarà $X \cdot BD = Q \cdot BT$.

Ora se prendiamo DX eguale e contraria alla DZ, è manifesto che questa DX esprimerà la resistenza che oppone il fuso al movimento della ruota. Decompongasi la DX nelle due DM, DN la prima perpendicolare ad AD, l' altra secondo AD. Perchè la potenza P faccia girare la ruota, le converrà superare non solo la potenza DM tendente ad indurre una rotazione contraria, ma altresì l' attrito $f \cdot DN$ proveniente dalla pressione DN che il fuso esercita in D contro il dente della ruota perpendicolarmente all' archetto descritto dal punto D. Dunque dovrà essere

$$P \cdot AK = (DM + f \cdot DN) AD$$

Ma $\quad DM = DX \cos. MDX = X \cos. y$

e $\quad DN = DX \sin. MDX = X \sin. y$

Dunque $\quad P \cdot AK = X \cdot AD (\cos. y + f \sin. y)$

e sostituendo dalla prima equazione il valor della X,

$$P = \frac{Q \cdot AD \cdot BT}{AK \cdot BD} (\cos. y + f \sin. y)$$

Il che si cercava.

275. *Coroll. I.* Dal punto nel quale il dente aggrappa il fuso sino al punto nel quale lo scappa, si va mutando il contatto D, e vanno crescendo le distanze AD, BD ed insieme l' angolo y. Dunque la P è variabile. Giova cercarne il valor massimo.

L' accrescimento della BD è piccolissimo, e può trascurarsi stante la picciolezza del cerchio D, e la sua lontananza dal centro B. In quanto alla AD ne prenderemo il valor maggiore, cioè quel

raggio che va dal punto A al punto dove il dente scappa dal fuso. Rimane a cercarsi il valor massimo del binomio $\cos. y + f \sin. y$. Eguagliandone il differenziale a zero, trovasi questo aver luogo quando è $\text{tang.}\, y = f$, nel qual caso diviene $\cos. y + f \sin. y = \sqrt{(1 + f^2)}$. Dunque il massimo valore di P, ossia quello che sarà in procinto di sollevare il peso nella situazione più difficile sarà

$$P = \frac{Q \cdot AD \cdot BT}{AK \cdot BD} \sqrt{(1 + f^2)}$$

prendendo i raggi BD, AD, come pur ora si è detto.

726. *Coroll. II.* Se $f = \frac{1}{3}$ si ha prossimamente $\sqrt{(+f^2)} = \frac{19}{18}$. Di qui la regola pratica insegnata da Belidor (*) che quando alzasi il peso per un incastro della ruota col fuso d' una lanterna, per mettere in conto l' attrito del dente bisogna accrescere il peso (oppure il suo braccio di leva) d' una diciottesima parte.

727. *Coroll. III.* Se il sistema è composto di più ruote, e di più rocchetti o fusi, e siano a, a', a'' ec. i bracci di leva posti dalla parte della potenza, b, b', b'' ec. i bracci di leva posti dalla parte del peso, e sia n il numero degl' incastri, che sarà sempre d' un' unità minore del numero delle coppie de' bracci sopra detti, sarà

$$P = \frac{b\, b'\, b'' \ldots}{a\, a'\, a'' \ldots} (1 + f^2)^{\frac{n}{2}}$$

(*) *Arch. Hydr.* Tom. I, pag. 104.

728. *Scolio*. Abbiamo considerata la sola resistenza dell'attrito del dente, facendo astrazione degli attriti degli assicelli delle ruote e dalla rigidezza del canapo che porta il peso Q. Per ottenere il giusto valore di P convien mettere in conto ancor queste resistenze; il che si farà nel modo spiegato nel Capo precedente.

Ed in ciò può tenersi la seguente regola facilissima. In un sistema di ruote dentate, che insomma è una combinazione di più assi nella ruota che agiscono l' uno contro l' altro, per conto dell' attrito dei denti si moltiplicano per $\sqrt{(1+f^2)}$ tutti que' bracci di leva posti dalla parte del peso, ne' quali v'è incastro; e nel resto si proceda come si disse all' art. 720 parlando delle combinazioni di più assi nella ruota.

Solamente si badi che nell' equazione dell' art. 720 il coefficiente f rappresenta l' attrito degli assi che appartiene alla terza specie; laddove nel moltiplicatore $\sqrt{(1+f^2)}$, f rappresenta l' attrito del dente, il quale appartiene alla prima specie. Quindi nel formare le equazioni relative a ciascuna ruota bisogna distinguere con diversi segni questi coefficienti, per assegnar poi a ciascheduno il valore numerico che gli è proprio.

CAP. XI.

Applicazione alla Troclea, ed alla Taglia.

729. Primieramente per la semplice Troclea è manifesto che l' equazione dello stato prossimo al

moto è la stessa che per l'Asse nella Ruota (720) facendovi $b = a$. Passando ora alla Taglia, agevoleremo il calcolo col supporre 1.° che tutti i tratti della fune siano paralleli; 2.° che tutti i raggi delle troclee siano eguali fra loro come pure quelli degli assi; 3.° che essendo f molto piccolo, possa farsi $\sqrt{(1 + f^2)} = 1$; 4.° che la rigidezza della fune sia presso a poco proporzionale alla tensione, onde possa farsi $\mu = 0$.

730. *Proposizione.* Sia ciascuno de' raggi delle troclee $= a$, ciascuno de' raggi degli assi $= r$, il numero de' tratti della fune che tirano le troclee mobili $= k$. Ponendosi per brevità

$$\frac{a(\nu + 1) + fr}{a - fr} = A$$

l'equazione dello stato prossimo al moto sarà

$$P = Q \cdot \frac{A^k (A - 1)}{A^k - 1}.$$

Si esprimono le tensioni de' tratti della fune colle lettere t, t', t''...... apposte nella Fig. 57, e fra le due tensioni t, t' si avrà l'equazione (720)

$$t'a = ta + (t' + t) fr + art$$

dalla quale si trae $t' = At$. Similmente si troverà

$$t'' = At' = A^2 t;\ t''' = At'' = A^3 t;\ \text{ec.}$$

Quindi l'ultima tensione, o sia quella della fune che immediatamente vien tratta dalla potenza, si troverà $= A^k t$, e la somma di tutte le altre sarà

$$t\left(1 + A + A^2 + A^3 \ldots + A^{k-1}\right)$$

o sia

$$= t \frac{A^k - 1}{A - 1}.$$

Ora l' ultima tensione è eguale alla potenza P, e la somma di tutte le altre è uguale al peso Q. Dunque $P : Q :: A^k : \frac{A^k - 1}{A - 1}$; onde ec.

731. *Scolio.* Annullandosi l' attrito, e la rigidezza della fune, viene $A = 1$, il che darebbe $P = Q \cdot \frac{0}{0}$; Ma determinato coi noti metodi il valore di quella frazione $\frac{0}{0}$, torna $P = \frac{Q}{k}$, siccome dev' essere (698).

CAP. XII.

Applicazione al Piano inclinato, ed alla Vite.

732. P*ROPOSIZIONE I.* Nel Piano inclinato, ritenendo le denominazioni dell' art. 702, l' equazione dello stato prossimo al moto riesce

$$P = Q \cdot \frac{\cos. m + f \sin. m}{\cos. n - f \sin. n}$$

Poichè dalla risoluzione delle forze P, Q (702) nasce la forza in direzione parallela al piano $= P \cos. n - Q \cos. m$, e la forza normale al piano $= P \sin. n + Q \sin. m$, onde l' attrito $= fP \sin. n + fQ \sin. m$. Dunque dovrà essere

$$P \cos. n - Q \cos. m = f P \sin. + f Q \sin. m.$$

733. *Coroll. I.* Traendo la potenza orizzontalmente, verrà $P = Q \cdot \frac{1 + f \text{tang. } m}{\text{tang. } m - f}$; e traendo la potenza parallelamente al piano, verrà $P = Q \cdot (\cos. m + f \sin. m)$.

Sono questi i valori che mettono la potenza in procinto di sollevare il peso Q. Quelli poi che bastano ad impedir semplicemente la discesa del peso, sono gli stessi, cangiandovi il segno di f. Si confronti l'art. 579.

734. *Coroll. II.* Qui la direzione più vantaggiosa per la potenza che vuole alzare il peso Q non è più la direzione parallela al piano, ma bensì quella che diverge dal piano con angolo che ha per tangente f. Poichè differenziando il valore di P (732) col porvi variabile l'angolo n, e facendo $dP = 0$, trovasi tang. $n = -f$.

Che se la potenza dovesse soltanto trattenere la caduta del peso, verrebbe tang. $n = f$; onde la direzione della potenza dovrebbe convergere col piano collo stesso angolo.

735. *Coroll. III.* Bene spesso avviene che la potenza strascini il peso sul piano inclinato mediante una fune che passa per una Troclea fissa. Ed allora l'equazione dello stato prossimo al moto sarà quella dell' art. 720, facendovi (729) $b = a$, ed in luogo di Q ponendovi (732)

$$Q \cdot \frac{\cos. m + f \sin. m}{\cos. n - f \sin. n}$$

Qui pure si badi che in questa formola f rappresenta l' attrito del corpo strisciante lungo il piano, ma nell' equazione (720) f rappresenta l' attrito dell' asse della troclea. Questi attriti sono diversi, e però nel far la sostituzione si dovranno connotare con segni differenti.

736. *Coroll. IV.* Supponghiamo che al peso P sia sottoposta una ruota il di cui raggio sia R,

ed il raggio del suo assicello sia r. Allora la potenza P cos. n — Q cos. m tende a far girare il centro della ruota attorno al punto dove la ruota stessa s' appoggia sul piano; ed il suo momento per indurre questa rotazione è $= PR$ cos. n — QR cos. m. Ora questo non può farsi senza che la ruota si rivolga intorno al suo asse, alla qual rotazione contrasta l' attrito fP sin. $n + fQ$ sin. m che fa l' asse contro il cerchio che lo stringe; e il momento di questa resistenza è $= fPr$ sin. $n + fQr$ sin. m. Dunque nello stato prossimo al moto sarà

$$PR \text{ cos. } n - QR \text{ cos. } m = fPr \text{ sin. } n + fQr \text{ sin. } m$$

onde $$P = Q \cdot \frac{R \text{ cos. } m + fr \text{ sin. } m}{R \text{ cos. } n - fr \text{ sin. } n}$$

In questo caso la più vantaggiosa direzione per la potenza che vuole alzare il peso sarà $\text{tang. } n = -\frac{fr}{R}$.

Torna poi allo stesso che il peso sia portato da una ruota, o da più ruote eguali; perchè compartendosi fra le ruote la pressione del peso, la somma degli attriti sarà sempre fP sin. $n + fQ$ sin. m, e la somma de' loro momenti fPr sin. $n + fQr$ sin. m come dianzi.

Di qui può vedersi come le ruote ajutino la potenza che tira un peso sopra un piano, e l' utile comparirà eziandio maggiore se si avverta che in questo caso l' attrito è della terza specie, e il coefficiente f ha un valore più piccolo che non ha, allorchè il peso è strascinato per terra.

737. *Coroll. V.* Quando il piano è orizzontale, e la direzione del tiro è anch' essa orizzontale,

proviene $P = \frac{frQ}{R}$. Se la potenza strascinasse il peso in piana terra, sarebbe $P = fQ$, e la potenza dovrebbe vincere l'intero attrito derivante dalla pressione del peso Q. Ma coll' ajuto delle ruote 1.° l'attrito si fa minore, cangiandosi in attrito degli assi quello che sarebbe stato attrito del moto radente; 2.° di questo attrito medesimo la potenza non dee vincere che tanta parte, quanta parte è il raggio dell' asse del raggio della ruota stessa.

Sia p. e. un peso di chil. 48950 da tirarsi per un piano orizzontale. Sia il peso imposto sopra un carretto a quattro rotelle, in ciascheduna delle quali stia il raggio dell' asse al raggio della rotella come 2 a 9. Supponghiamo per l' attrito degli assi (517) $f = \frac{1}{7}$, ed essendo $\frac{r}{R} = \frac{2}{9}$, sarà $P = \frac{2}{63} Q =$ chil. 1553,97.

738. *Proposizione II.* Nella Vite, ritenendo le denominazioni dell' art. 707, l'equazione dello stato prossimo al moto riesce

$$P = Q \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{h + 2f\pi b}{2\pi b - fh}$$

Ritornando sulle traccie del citato articolo, avremo tuttavia

$$P : X :: 2\pi b : 2\pi a.$$

Passando poscia a paragonar fra loro le forze X e Q, sarà adesso (735)

$$X : Q :: 1 + f \,\text{tang.}\, m : \text{tang.}\, m - f$$

o sia, poichè (705) $\text{tang.}\, m = \frac{2\pi b}{h}$,

$$X : Q :: h + 2f\pi b : 2\pi b - fh$$

Moltiplicando questa proporzione per la precedente si otterrà l'annunciata equazione.

CAP. XIII.

Applicazione ad altre macchine composte.

739. Mercè le regole insegnate ne' Capitoli precedenti non vi sarà combinazione di macchine nella quale non possa agevolmente rinvenirsi l'equazione dello stato prossimo al moto. Sarebbe soverchio il trattenerci su molti particolari; ci basterà mostrarne un esempio nella macchina descritta da Belidor (*) sotto il nome di *Lévier de la Garousse.*

740. Il peso V (Fig. 67) posto sopra un carretto mobile su quattro rottelle R viene strascinato mediante la fune $TZSN$ circondotta alla troclea mobile ZS. Il capo T della fune è fermato ad un immobile appoggio; l'altro capo abbraccia il cilindro NH che gira insieme colla ruota OGF da G verso F. Si comunica il moto alla ruota nel modo seguente: AB è un vette mobile attorno il fulcro C. Di qua e di là dal fulcro in D, E sono due occhietti, su' quali ponno moversi liberamente gli arpioni DG, EF che terminano alla periferia della ruota, e prendono uno per volta i denti dei quali quella periferia è guernita, siccome la figura dimostra. Quando il vette AB è orizzontale, le rette GI, FK che congiungono l'occhietto col-

(*) *Arch. Hydr.* Tom. I, pag. 122.

punto dove l' arpione tocca la periferia, vengono ad essere tangenti della periferia stessa in G, F. Ora se l' estremità A si applica una potenza verticale P, che farà girare il vette attorno al fulcro C, che s'alzerà l'occhietto E, e l'arpione EF spingerà avanti il punto F della ruota. Dopo ciò se un' altra potenza P' si applica all' estremità B, che farà girare il vette in senso contrario, s' alzerà l' occhietto D, e l' arpione DG spingerà avanti il punto G. Così mercè l' azione alternativa delle due potenze P, P' si farà che la ruota continuamente giri per lo stesso verso GF, e il peso continuamente sia spinto innanzi.

741. Sia il peso V = chil. 48950; il raggio degli assi delle rotelle R sia $\frac{2}{9}$ del raggio delle rotelle medesime. Il raggio della troclea ZS sia = metri 0,108, ed il raggio del suo asse ne sia la decima parte, cioè m. 0,011. Il diametro della fune $TZSN$ sia m. 0,037. Sia poi il raggio HN del cilindro m. 0,1355; il raggio HF della ruota m. 0,65; il raggio dell' asse sopra cui gira la ruota m. 0,027. Sia $AC = CB = m$. 2,761; e supponghiamo che essendo la AB orizzontale, e conducendosi da C le perpendicolari CL, CM sopra le direzioni FK, GI, ciascuna di queste perpendicolari sia la decima parte di AC, cioè m. 0,276. Per ultimo pesi il vette AB chil. 97,9; e il raggio dell' assicello C sopra cui si rivolge sia m. 0,02.

Avendosi queste misure si cerca il valore della potenza P che tirando in A il giogo AB orizzon-

tale è sul punto di moverlo, facendo insieme girare la ruota, e promovendo il peso V.

742. Primieramente in grazia delle rotelle R, lo sforzo che dee vincersi per movere il peso, posto $f = \frac{1}{7}$ si riduce a chil. 1553,97 come si conchiuse (737) dalla formola $P = \frac{frQ}{R}$.

Ora cominciando dal considerare l' azione della Troclea ZS, perchè le due funi TZ, NS sono presso a poco parallele, la tensione di ciascuna di esse funi sarebbe la metà di questo peso, cioè chil. 776,985. Ma poichè v' è di mezzo la Troclea, la tensione della fune TZ sarà bensì uguale al peso di chil. 776,985, che io chiamerò Q, ma la tensione dell' altra fune NS, che io chiamerò Y, sarà tanto maggiore della Q quanto importerà l' attrito della troclea, e la rigidezza della corda. Dicasi il raggio della troclea $= h$, il raggio del suo asse $= r$. Avremo tra le forze Y, Q l' equazione

(a) $Yh = Qh + (Y + Q) fr + h(\mu + \nu Q)$.

743. Consideriamo ora la Ruota e il cilindro. E sia il raggio della ruota $HF = a$, il raggio del cilindro $HN = b$, il raggio del loro asse comune $= r'$. Dicasi poi X la forza che fa in F l' uncino EF contro il dente della ruota agendo secondo la tangente FK, e sia l' angolo $AEF = \theta$. Vengono in contrasto per mezzo di questo Asse nella ruota le due forze X, Y e perchè l' angolo delle loro direzioni è $= \theta$, avremo (718) l' equazione

(b) $Xa = Yb + fr' \sqrt{(X^2 + 2XY\cos.\theta + Y^2)} + b(\mu + \nu Y)$

744. Consideriamo per ultimo la Leva AB. E diciamo $AC = m$, $CL = n$, il raggio dell' asse $C = r''$. Le direzioni delle forze P, X applicate alle estremità della leva fanno tra loro un angolo $= 90^\circ - \theta$. Quindi se dicasi Π il peso del giogo AB che grava esso pure il punto C, sarà la pressione dell' asse C

$$\sqrt{\left\{(P + \Pi)^2 + 2\,(P + \Pi)\,\sin.\,\theta + X^2\right\}}$$

Avremo pertanto l' equazione

$$(c)\quad Pm = Xn + fr''\sqrt{\left\{(P + \Pi)^2 + 2(P + \Pi)\sin.\,\theta + X^2\right\}}$$

Ora dalle tre equazioni (a) (b) (c) determinando successivamente Y, X, P avremo in ultimo la potenza P espressa per Q di cui già conosciamo il valore = chil. 776,985.

745. Le equazioni ponno rendersi assai più semplici col trascurare alcuni elementi che poco influiscono nel valor finale. Si può omettere il coefficiense μ che in effetto è piccolissimo a fronte di $\nu\,Q$, $\nu\,Y$ per essere i pesi Q ed Y assai grandi. Si ponno anche riguardare le forze X, Y come parallele, e così pure le forze P, X onde le pressioni sugli assi H, C siano rispettivamente $X + Y$, $P + \Pi + X$. Con questo non si fa che stimare queste pressioni alquanto maggiori che in realtà non sono, ma la differenza che ne proviene nel momento dell' attrito degli assi è picciolissima stante la picciolezza de' coefficienti fr', fr''. Con tali agevolezze le equazioni divengono

$$Yh = Qh + (Y + Q)fr + h\,\nu\,Q$$
$$Xa = Yb + (X + Y)fr' + b\,\nu\,Y$$
$$Pm = Xn + (P + \Pi + X)fr''$$

onde ricavasi

$$=Q.\frac{n+fr''}{m-fr''}.\frac{b(\nu+1)+fr'}{a-fr'}.\frac{h(\nu+1)+fr}{h-fr}+\Pi.\frac{fr''}{m-fr''}$$

746. Nel porre i valori numerici (741) bisogna aver l' avvertenza di accrescere i raggi h, b della troclea, e del cilindro con aggiungervi il semidiametro della fune. Il coefficiente f dell' attrito si suppone $=\frac{1}{7}$; il coefficiente ν della rigidezza della corda si determina coi dati dell' art. 528, e trovasi $\nu=0{,}088$. Compiuto il calcolo, verrà $P=0{,}03.Q+0{,}1=$ chil. 23,41.

Belidor trova $P=$ chil. 60 a un di presso. Il divario viene principalmente da ciò che egli stima indistintamente ogni attrito essere la terza parte della pressione.

SEZIONE TERZA

DELLE MACCHINE IN MOTO.

CAP. XIV.

Del moto equabilmente accelerato delle Macchine.

747. Accresciuta la potenza oltre il limite dello stato prossimo al moto, essa solleva il peso con moto di vario genere secondo la varia natura e della potenza e delle resistenze che al moto della

macchina fanno contrasto. E già perchè il moto si conservi, rendesi necessario per cagione delle resistenze che la potenza sia una forza continuamente applicata, o sia (203) una forza acceleratrice.

Se questa forza sarà costante, e la resistenza costante ancor essa, e i loro momenti saranno sempre i medesimi, girerà la macchina ed alzerà il peso con moto equabilmente accelerato. Se poi nel progresso del moto, o le forze o i momenti loro patiranno alterazione, sarà il moto accelerato bensì, ma non equabilmente. E finalmente potrà essere che diminuendosi continuamente la forza motrice, o aumentandosi continuamente la resistenza, vengano queste forze contrarie a pareggiarsi fra loro; nel qual caso l'accelerazione cesserà del tutto, e il moto della macchina si farà equabile, conservando essa quel grado di velocità che aveva acquistato nel termine dell' accelerazione. Considereremo questi tre casi nei tre Capitoli susseguenti.

748. Proponghiamoci da prima un peso Q da sollevarsi mediante un Asse nella ruota. Il motore della macchina sia un altro peso P pendente da una fune avvolta alla periferia della Ruota. In questo caso, essendo P e Q costanti, e i loro momenti essendo invariabili, il moto dev' essere uniformente accelerato.

749. *Proposizione*. Sia P il peso motore, Q il peso da sollevarsi; a, b i rispettivi raggi o bracci di leva; S il momento d' inerzia della macchina riferito all' asse di rotazione. Scenderà il peso P, e salirà il peso Q con moto equabilmente accelerato, e chiamando φ, φ' le rispettive forze acceleratrici, sarà

$$\phi = ag \cdot \frac{Pa - Qb}{gS + Pa^2 + Qb^2}; \quad \phi' = bg \cdot \frac{Pa - Qb}{gS + Pa + Qb^2}$$

Dim. Sia ω la velocità angolare del sistema; sarà (341) $\frac{d\omega}{dt}$ eguale al momento della forza sollecitante diviso pel momento d'inerzia. Ora essendo Pa il momento del motore P, e Qb il momento del peso Q, sarà $Pa - Qb$ il total momento della forza sollecitante. Quanto al momento d' inerzia, siccome le masse $\frac{P}{g}$, $\frac{Q}{g}$ ad ogni istante si movono con quella velocità con cui girano le estremità de' rispettivi raggi a, b, così debbono intendersi concentrate nelle estremità di que' raggi; onde i loro momenti d'inerzia saranno $\frac{Pa^2}{g}$, $\frac{Qb^2}{g}$, e sarà $S + \frac{Pa^2}{g} + \frac{Qb^2}{g}$ il momento d' inerzia di tutto il sistema. Dunque sarà

$$\frac{d\omega}{dt} = g \cdot \frac{Pa - Qb}{gS + Pa^2 + Qb^2}$$

che pongo per brevità $= gM$.

Sarà dunque la velocità angolare $\omega = g\int M dt$. E se chiamiamo u, u' le velocità negli estremi de' raggi a, b, o sia le velocità de' pesi P, Q, sarà (338)

$$u = a\omega = ag\int M dt; \quad u' = b\omega = bg\int M dt$$

onde (206) $\phi = \frac{du}{dt} = agM$; $\phi' = \frac{du'}{dt} = bgM$.

750. *Coroll. I.* Chiedendosi il valore da darsi al raggio a affinchè il peso sollevato colla massima velocità, questo si avrà dall'equazione

$$d.\frac{Pa-Qb}{gS+Pa^2+Qb^2}o=$$

differenziando nel supposto di a variabile.

E siccome al variare di a varia anche S, così prima di differenziare converrà porre in luogo di S il suo valore espresso per a. Potremo tuttavia dispensarcene quando S possa trascurarsi rimpetto agli altri termini del denominatore, oppure quando S possa prendersi per costante attesochè cangi pochissimo al cangiare di a.

751. *Coroll. II.* Nella troclea fissa abbiamo $a=b$, e posto $2T$ il peso della troclea, riesce (311) $gS=Ta^2$. Scenderà pertanto il peso P e salirà il peso Q con pari forza acceleratrice, che sarà $=g.\frac{P-Q}{T+P+Q}$.

Di qui l' uso della macchinetta di Atwood per verificare le leggi dalla caduta de' gravi.

752. *Coroll. III.* Se il peso Q non sale verticalmente, ma per un piano inclinato, serviranno tuttavia le formole precedenti, se non che nel numeratore in luogo di Q si dovrà porre (702) $Q.\frac{\cos. m}{\cos. n}$.

753. *Coroll. IV.* Finalmente se si vorrà tener conto delle resistenze dell' attrito e della corda, serviranno ancora le formole dell' art. 749, se non che nel numeratore in luogo di Qb dovrà porsi (720)

$$Qb+(P+Q)fr+b(\mu+\nu Q)$$

Che se il peso Q fosse tratto su per un piano comunque inclinato, dopo l' accennata sostituzione, converrà nel numeratore cangiar Q in

$$Q \cdot \frac{\cos. m + f \sin. m}{\cos, n - f \sin. n}$$

coll' avvertenza già indicata (735) intorno ai valori del coefficiente f.

Sicoome poi i coefficienti delle resistenze f, μ, ν ponno aversi per costanti (511. 520. 524) così egli è chiaro che il moto resta sempre uniformemente accelerato.

CAP. XV.

Del moto variabilmente accelerato.

754. Allorquando col giro continuo d'una ruota si vuol produrre un moto alternativo, spesse volte si fa uso della manovella. Così avviene per lo più nelle ruote destinate ad alzare gli stantuffi delle trombe idrauliche. Il gambo dello stantuffo è attaccato al gomito F della manovella (Fig. 68). Girando la ruota, il punto F s'innalza in R descrivendo il semicircolo FGR, poscia ritorna in F per l'opposto semicircolo RTF, e così lo stantuffo s' alza e s' abbassa a vicenda.

In questo movimento quand' anche il motore equivaglia a un peso costante P, ed anche lo sforzo dello stantuffo equivaglia a un peso costante Q pendente dal braccio della manovella, con tutto ciò il moto non può essere equabilmente accelerato. Imperochè mentre lo stantuffo ascende pel semicircolo FGR, il braccio di leva del peso Q va cangiandosi, ed è nullo nel punto F, massimo nel punto G ove è uguale al gomito CF della mano-

vella, e torna nullo nel punto sublime R. Dal che tosto si vede che il moto s'anderà eccelerando, ma per gradi sempre minori nel primo quadrante FG, poi per gradi sempre maggiori nel secondo quadrante GR. Determiniamo la legge di questo movimento.

755. *Proposizione.* Sollevandosi il peso mediante una manovella, determinarne la velocità in qualsivoglia punto del semicircolo FGR.

Sia a il braccio di leva del peso motore P, il gomito della manovella $CF = b$, il momento d'inerzia della macchina $= S$, nel quale intendo compresi anche i pesi P, Q; finalmente sia ω la velocità angolare della macchina, conoscendo la quale, si conosce la velocità di ciascun punto. Dopo il tempo t sia il punto F passato in M con avere descritto l'angolo $FCM = \psi$; sarà allora il momento del peso $= Qb \sin. \psi$. Quindi (341)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pa - Qb \sin. \psi}{S}.$$

ovvero, per essere $\omega = \frac{d\psi}{dt}$,

$$\frac{dd\psi}{dt^2} = \frac{Pa - Qb \sin. \psi}{S}$$

Moltiplicando per $2d\psi$, ed integrando in modo che $\psi = 0$ dia $\frac{d\psi}{dt} = 0$, avremo

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \omega^2 = \frac{2Pa\psi - 2Qb(1 - \cos. \psi)}{S}$$

756. *Coroll. I.* Di qui si ricavano le seguenti relazioni tra gli spazj, e i quadrati della velocità

$$\psi = 0 \qquad S\omega^2 = 0$$

$$\psi = \frac{1}{4}\pi \qquad S\omega^2 = \frac{1}{2} Pa\pi - 0{,}586\, Qb$$

$$\psi = \frac{1}{2}\pi \qquad S\omega^2 = Pa\pi - 2\, Qb$$

$$\psi = \frac{3}{4}\pi \qquad S\omega^2 = \frac{3}{2} Pa\pi - 3{,}414\, Qb$$

$$\psi = \pi \qquad S\omega^2 = 2\, Pa\pi - 4\, Qb$$

delle quali è facile accorgersi come il moto per FGR non s'accelera equabilmente, ma sempre meno nel quadrante FG, e sempre più nel quadrante GR.

757. *Coroll. II.* Per altro considerando l' intera salita da F in R si vede che i quadrati delle velocità acquistate ne' punti G, R sono fra loro come gli spazj descritti FG, FR nè più nè meno come se il moto equabilmente s' accelerasse. Dal che si vede che compensandosi abbastanza le anomalie del moto ne' punti intermedj possiamo riguardare l' accelerazione come se fosse uniforme in tutto il tratto della salita del peso. La forza acceleratrice costante che si ragguaglia alla forza reale che è variabile, si otterrà (210) dividendo il quadrato della velocità per il doppio dello spazio, e sarà $= \dfrac{Pa - \frac{2Qb}{\pi}}{S}$;

onde il braccio di leva medio sarà $= \frac{2b}{\pi} = \frac{7}{11} b$.

Di qui la regola seguente.

758. *Coroll. III.* Quando il peso è sollevato per via d' una manovella, il suo braccio di leva può aversi come costante, ed eguale a $\frac{7}{11}$ del gomito della manovella.

759. *Scolio I.* Compiuta la salita, segue la discesa per l'arco ATF che riconduce lo stantuffo al punto donde partì. In questa discesa la potenza motrice P non viene punto in contrasto col peso Q. Quando la manovella si adopera per innalzare gli stantuffi delle trombe, arrivato lo stantuffo al punto supremo R, discende da sè pel proprio peso, e non esercita veruno sforzo contro la macchina. Quindi in tutto quel tempo che impiega la manovella a dar volta, e ricondurre il gomito al termine più basso, la potenza motrice è oziosa.

760. *Scolio II.* Ad evitare questa perdita di tempo è ordinata la manovella doppia. Sono disposte sullo stesso asse due manovelle eguali situate nello stesso piano, ma volte in parti contrarie. Ai loro gomiti E, F sono attaccati i gambi degli stantuffi di due trombe uguali, in modo che mentre l'uno ascende pel suo semicircolo, l'altro discende pel semicircolo opposto.

Poichè lo stantuffo che discende non fa forza, è manifesto non esservi altra differenza tra la manovella semplice e la doppia, se non che quella interpolatamente, e questa continuamente è applicata a far montare il peso Q per l'arco FGR nel modo di sopra spiegato; onde il braccio di esso peso può aversi per costante ed $= \frac{7}{11} CF$.

Si fanno ancora combinazioni di tre o quattro manovelle sullo stesso asse variamente disposte, la ragion delle quali facilmente s' intenderà procedendo ad imitazione del calcolo precedente. E tanto basti aver detto di questa macchina per dare un esempio del moto disegualmente accelerato, e del modo di ragguagliarne le irregolarità.

CAP. XVI.

Del moto uniforme delle macchine.

761. Rallentasi l'accelerazione della macchina, e il moto tende all'uniformità, allorchè nel processo del moto o scema la forza acceleratrice o cresce la resistenza. Si ha l'esempio del primo caso nelle macchine mosse per forza animata, la qual forza (464) viene scemando a misura che il moto s'affretta. Si ha l'esempio del secondo caso nelle macchine guernite d'un volante, che colle sue palette battendo l'aria incontra resistenza tanto maggiore (226) quanto è maggiore la velocità.

762. *Proposizione.* Posti gli stessi dati dell'art. 750, se invece del peso costante P serva per motore una forza F, funzione qualunque della velocità, salirà il peso Q con moto accelerato, e sarà la forza acceleratrice

$$\phi' = b \cdot \frac{Fa - Qb}{S + Fa^2 + Qb^2}.$$

Dimostrasi come all'art. 750.

763. *Coroll. I.* Conosciuta la forza ϕ', le note equazioni $\phi' dt = du$, $\phi' ds = u du$ danno a conoscere gl'incrementi della velocità, e tutti gli accidenti del moto. E se F decresce col crescere della velocità, anche la forza acceleratrice ϕ' andrà scemando; onde si scorge che il moto s'accelera in principio, ma va poi tendendo all'uniformità.

764. *Coroll. II.* Il moto diviene uniforme, tostochè diventa $\phi' = 0$, o sia $Fa = Qb$. Dal che ap-

parisce che la forza richiesta nel motore per conservar la macchina nello stato permanente di moto equabile è quella stessa che richiedesi per mantenerla in equilibrio: il che altronde è palese per se medesimo.

765. *Coroll. III.* La stessa equazione $Fa = Qb$ ci farà nota la velocità equabile e permanente della macchina. Per darne esempio supponghiamo essere F la forza d'un uomo, espressa per alcuna delle tre formole che già (486) proponemmo.

Posto il valore di F nell'equazione $Fa = Qb$, ne avremo secondo le varie ipotesi

$$1.^{a} \quad v = h\left(1 - \frac{bQ}{ag}\right)$$

$$2.^{a} \quad v = h\sqrt{\left(1 - \frac{bQ}{ag}\right)}$$

$$3.^{a} \quad v = h\left(1 - \sqrt{\frac{bQ}{ag}}\right)$$

Sarà questa la velocità equabile del punto d'applicazione del motore F; e moltiplicandola per $\frac{b}{a}$ si avrà la velocità con cui s'alza il peso Q.

766. *Coroll. IV.* Volendosi tener conto dell'attrito e della rigidezza della fune, si farà come all'art. 753, onde sarà l'equazione dello stato permanente

$$Fa = Qb + (F + Q)'fr + b\,(\mu + \nu Q).$$

E se la macchina non levi di peso la massa Q, ma la strascini per un piano, in luogo di Q dovrà poi farsi la sostituzione ivi (753) insegnata.

767. *Coroll. V.* Generalmente se sia Nk la somma de' momenti delle resistenze, l'equazione del

moto equabile sarà $Fa = Qb + Nk$. Ove se F od anche N siano funzioni della velocità, converrà porvi i loro valori espressi per la velocità d'un determinato punto della macchina; ed allora l'equazione stessa ci darà a conoscere la velocità che al giro equabile e permanente della macchina compete.

CAP. XVII.

Della disposizione più vantaggiosa delle macchine.

768. Nelle macchine che sollevano un peso con moto equabile *l' effetto della macchina* si misura dal prodotto del peso sollevato per la sua velocità. Similmente *l'effetto della forza* motrice misurasi (475) dal prodotto di essa forza per la sua velocità; vale a dire dal prodotto del peso equivalente allo sforzo che fa il motore, per la velocità colla quale egli cammina.

769. *Proposizione I.* Sia un Asse nella Ruota, e il motore F camminando con velocità equabile v sollevi il peso Q con velocità u. Sarà l'effetto della macchina eguale a quello della forza.

Poichè pel moto equabile converrà essere (764) $Fa = Qb$. Ma $a : b :: v : u$. Dunque $Fv = Qu$. Ora Qu è l'effetto della macchina, Fv l'effetto della forza.

770. *Scolio.* Scorgesi che la potenza sta al peso come la velocità del peso a quella della potenza. Questa proporzione ha luogo così nel moto equabile come nell' equilibrio, se non che nel moto si para-

gonano le velocità attuali, nell' equilibrio le virtuali. E vale non solo per l' Asse della Ruota, ma per ogni macchina immaginabile.

771. *Coroll. I.* L' effetto d' una forza applicata a trasportare equabilmente un peso non cresce punto, qualunque siasi la macchina che vi si adopri. Vana è dunque la volgare opinione che la macchina addoppi o moltiplichi l' effetto della forza. In che veramente consista l' utilità delle macchine si dirà fra poco.

772. *Coroll. II.* Se tengasi conto delle resistenze, essendo l' equazione dello stato permanente (767) $Fa = Qb + Nk$, ovvero $Fv = Qu + \frac{Nku}{b}$, scorgesi che l' effetto della macchina Qu non eguaglia l' effetto della forza Fv. Quindi tanto è lontano che la macchina possa aumentar l' effetto della forza, che anzi lo scema tanto più quanto più soggiace agli attriti e ad altre resistenze.

773. *Coroll. III.* Allorchè la forza F decresce col crescere della velocità, havvi tal valore della forza (488) che rende massimo il suo effetto Fv. Questo stesso valore adunque renderà massimo anche l' effetto della macchina. Di qui nasce la ricerca del modo di disporre la macchina col maggior vantaggio.

774. *Proposizione II.* Dato il peso Q da sollevarsi equabilmente colla forza F funzion data della velocità, determinare il rapporto $\frac{b}{a}$ del raggio del cilindro a quello della ruota cosicchè ottengasi il massimo effetto, o viceversa.

Prima per l' equazione (488) $d \, . \, Fv = 0$ si cercherà il valore di F conveniente per l' effetto massimo. Poscia si porrà questo valore nell' equazione $Fa = Qb$, onde dall' uno de' due elementi Q, $\frac{b}{a}$ troveremo l' altro.

Che se intervenissero resistenze, si farà uso dell' equazione $Fa = Qb + Nk$.

775. *Coroll. I.* Sia F la forza d' un uomo; il suo valore per l' effetto massimo sarà (488) l' un de' tre $\frac{1}{2}g$, $\frac{2}{3}g$, $\frac{4}{9}g$: Quindi scioglierà il Problema l' una di queste tre equazioni

$$ga = 2Qb \, ; \quad 2ga = 3Qb \, ; \quad 4ga = 9Qb$$

secondo si adotta una o l' altra delle tre ipotesi (486).

776. *Coroll. II.* Se non un solo agente dotato di forza F, ma più agenti in numero n fossero applicati alla ruota, l' equazion sarebbe $nFa = Qb$. E qui dei tre elementi n, Q, $\frac{b}{a}$ dati due qualunque, potrà determinarsi il terzo nel modo il più vantaggioso.

777. *Coroll. III.* L' utilità di questa Teoria mi fa credere opportuno il dichiararla con un esempio. Adottiamo per la forza permanente d' un uomo l' espressione

$F = g\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2$ e sia $g =$ chil. 21, $h =$ metr. 1,95.

E con un Argano ove il raggio della Ruota superi dodici volte quello del cilindro dovendo sollevarsi una mole del peso chil. 2800, voglia sapersi qual numero n d' operaj torni meglio adoperare intorno

alla Ruota. L' equazione $4nga = 9Qb$ darà $n = 25$.

È facile l'assicurarsi esser questo in realtà il numero più vantaggioso. Poichè fatto $n = 25$ viene $F = \frac{Qb}{na} = 9,33$; e $v = h\left(1 - \sqrt{\frac{F}{g}}\right) = 0,65$. Sarà dunque l'effetto d'ognuno $= 6,066$; e l'effetto della macchina $= 25 \cdot 6,066 = 151,65$.

Or si provi qualunque altro numero d'operaj; l'effetto di ciascuno tornerà sempre minore di 6,066; e l'effetto della macchina avrà sempre minor proporzione al numero degli operaj. Se per esempio si volessero crescere gli operaj sino a 100, si troverà che l'effetto di ciascuno non arriva alla metà del precedente. E così col quadruplicare gli agenti neppur vien che si raddoppi l'effetto della macchina.

CAP. XVIII.

Dei veri vantaggi delle Macchine.

778. Il falso concetto che sogliono formarsi gli imperiti della natura e del potere delle macchine spesse volte porge alimento a vane lusinghe, ed a pregiudicevoli inganni. Uno de' più comuni si è quello di riguardare le macchine come valevoli ad accrescere e moltiplicare la forza degli agenti, il che non è sempre vero. A formarci una giusta idea dell'ajuto che può sperarsi dalle Macchine, noi riguardando agli usi più comuni delle medesime, le distingueremo in due classi: quelle destinate semplicemente a sostenere un peso, e quelle destinate a tirarlo o sollevarlo equabilmente.

779. Nelle macchine della prima classe tanto l'effetto della macchina, quanto l'effetto immediato della forza non può desumersi che dalla quantità del peso sostenuto.

Ciò posto egli è evidente che la macchina accresce l'effetto della forza; giacchè p. e. una forza di chil. 10 sosterrà colla leva chil. 100, sempre che il braccio della forza sia decupio di quello del peso.

780. Si chiederà come mai la forza possa produrre un effetto tanto maggior di se stessa? Se ben si consideri, vedremo che la forza 10 non sostiene realmente tutto il peso 100, ma soltanto la decima parte. Supponghiamo la leva di secondo genere: la forza 100 si risolve in due; l'una = 90 che agisce sul fulcro, l'altra = 10 che agisce sul punto d'applicazione della potenza. La prima è tutta sostenuta dall'appoggio; la potenza sostiene solamente la seconda. Archimede non domandava che un punto fisso per tenere equilibrato il globo terracqueo. Ben dice Carnot (*), se egli l'avesse trovato, non egli veramente, ma sibbene il punto fisso avrebbe in realtà sostenuto la Terra.

781. Nelle macchine della seconda classe tanto l'effetto della macchina quanto quello della forza non può desumersi semplicemente dalla quantità del peso sollevato; altrimenti la misura dell'effetto riuscirebbe del tutto vaga e indeterminata. In fatti qualunque piccola forza può trasportare un peso quanto si voglia enorme (**) tanto solo che si con-

---

(*) *Principes de l'equil. et du mouv.*, pag. 238.

(**) Galileo, *Op.* Tom. I, pag. 553.

ceda potersi dividere questo peso e trasportarne un pezzo per volta. Per lo che convien mettere in conto anche il tempo nel quale la forza è capace di trasportare il peso per un dato spazio, o sia la velocità del trasporto. Egli è perciò che l' effetto misurasi (768) dal prodotto del peso per la velocità.

Or ciò posto, abbiamo già mostrato (769) che la macchina non accresce l' effetto della forza. Se l' uomo collo sforzo di chil. 10 solleva per via di una macchina un peso di chil. 100, egli si muove con velocità decupla del peso, e fa lo stesso come se immediatamente operando trasportasse quei cento chilogrammi in dieci viaggi, caricandosi di 10 chil. per volta. In somma quel che si guadagna nella quantità del peso trasportato, si perde nella velocità, e l' effetto si rimane lo stesso.

782. Fra le due notate classi di macchine havvi dunque questa caratteristica differenza, che le prime aumentano l' effetto della potenza, non così le seconde.

Havvi un' altra differenza non men rimarcabile in ordine alle resistenze d' attrito, delle funi, ed altre. Nelle macchine della prima classe queste resistenze sono tutte in vantaggio della potenza, e sostentano anch' esse la loro parte del peso; onde tanto meno rimane alla potenza da reggerne. Per lo contrario nelle macchine della seconda classe, le resistenze tornano tutte a scapito della potenza, e forman parte del peso da vincersi; onde si esige per questo capo una forza maggiore di quella che si richiederebbe coll' immediata applicazione della potenza.

783. Intese queste cose, egli è facile ora il ravvisare il vero scopo e la vera utilità delle macchine. Servono le macchine della prima classe ad accrescere l'effetto della potenza: e ciò fanno col compartir convenientemente il peso fra la potenza e l'appoggio.

Servono le macchine della seconda classe non già ad accrescere l'effetto della forza nella sua quantità, ma a modificarne come più piace la qualità; e ciò fanno nel modo seguente. Essendo l'effetto della macchina il prodotto del peso per la sua velocità, noi potremo accrescere a piacimento l'uno dei due fattori, purchè si diminuisca l'altro in proporzione. E così potremo muovere per via di macchina un peso enorme, purchè siam contenti di muoverlo lentamente; o viceversa muovere un peso con grandissima velocità, purchè sia un picciol peso; laddove coll'immediata applicazione della forza non potremmo guari oltrepassare certi limiti nè di velocità nè di peso.

784. Un'altra utilità delle Macchine è quella di poter applicare al trasporto o al sostentamento de' pesi ancor quelle forze che immediatamente non potrebbono applicarvisi, e con quella direzione che torna più comoda alla potenza. L'urto d'una corrente, o la forza d'una bestia non potrebbe usarsi a trarre acqua da un pozzo, o dalla cava le pietre, se non fosse trasmessa da una macchina; e l'uomo stesso caverà acqua più agiatamente per via d'una troclea, che non farebbe traendo la secchia verticalmente all'insù.

785. Quantunque la scelta della macchina per un dato oggetto e la sua più acconcia disposizione non possano ridursi a precetti, pur gioverà notare alcune poche generali avvertenze.

Prima. Nelle macchine destinate al trasporto di pesi giova ridurre al minimo possibile gli attriti, e le altre resistenze; non così in quelle destinate al semplice sostentamento di pesi. E perciò generalmente parlando, nel primo caso son preferibili le macchine semplici, nel secondo le composte.

Seconda. Quando la forza decresce nel crescere la velocità, conviene disporre la macchina in guisa che la forza di ciaschedun agente si eserciti col maggiore vantaggio; il che si farà nel modo di sopra spiegato (774).

Terza. Generalmente poi si conviene aver cura che la forza s'impieghi tutta nel produrre l'effetto inteso, e niuna parte se ne disvii in effetti stranieri al vero oggetto della macchina. Così nella leva se la potenza agisse obbliquamente al suo braccio, una parte di essa si perderebbe nel produrre uno sforzo contro del punto d'appoggio, con inutile consumo di forza in puro detrimento della macchina.

APPENDICE

SUL PRINCIPIO DELLE VELOCITA' VIRTUALI
E SUOI USI NELLA MECCANICA.

CAP. I.

Esposizione e dimostrazione
del Principio delle Velocità virtuali.

786. Al punto A (Fig. 69) sia applicata una forza S, la quale agisca per la retta AB. Immagino che il punto A trascorra un altro punto a vicinissimo ad A. Condotta per a la perpendicolare ab sopra AB, sarà Ab lo spazietto percorso dal punto A secondo la retta AB, che è la direzione della forza S. Questo spazietto Ab si dirà la *Velocità virtuale* della forza S.

Adunque per velocità virtuale d' una forza intendiamo lo spazietto che per un dato moto minimo descrive il punto d' applicazione della forza secondo la direzione della forza medesima.

787. Il prodotto $S \cdot Ab$, o sia il prodotto della forza S per la sua velocità virtuale, si dirà il *Momento* della forza S.

Si adottano queste denominazioni per abbreviare il discorso. Del resto convien bene guardarsi dallo scambiare questo Momento colle altre diverse

quantità che abbiamo altrove (54. 105) sotto lo stesso nome disegnate.

788. *Proposizione I.* Concorrendo più forze in un punto, il momento della risultante è uguale alla somma de' momenti delle componenti.

Concorrano nel punto A le forze S, S', S'' ec. agenti secondo le rette $AB = s$, $AC = s'$, $AD = s''$ ec. e sia la loro risultante V agente secondo la retta $AR = u$. Riferito questo sistema a tre assi ortogonoli, siano x, y, z le coordinate del punto A. Immagino che questo punto A trascorra in a, percorrendo secondo le tre coordinate gli spazietti dx, dy, dz. Considerando le rette s, s', s'' .... u siccome funzioni di x, y, z, si vede che gli spazietti Ab, Ac, Ad .... Ar percorsi dal punto A secondo le rette s, s', s'' .... u, saranno rispettivamente ds, ds', ds'' .... du. E i momenti delle forze saranno $S\,ds$, $S'\,ds'$, $S''\,ds''$ .... $V\,du$. Ora io dico che sarà

$$V\,du = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds'' \ldots.$$

Dim. Siano a, b, c le coordinate del punto B. Sarà

$$AB = s = \sqrt{\left((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right)}; \text{ onde}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{x-a}{s}; \quad \left(\frac{ds}{dy}\right) = \frac{y-b}{s}; \quad \left(\frac{ds}{dz}\right) = \frac{z-c}{s}.$$

Ora si risolva la forza S in tre forze parallele alle tre coordinate x, y, z. Queste saranno $S \cdot \frac{x-a}{s}$; $S \cdot \frac{y-b}{s}$; $S \cdot \frac{z-c}{s}$; o sia $S\left(\frac{ds}{dx}\right)$; $S\left(\frac{ds}{dy}\right)$; $S\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Facciasi la stessa risoluzione per le altre

forze S', S'' ec. ed anche per la forza V, la quale similmente verrà decomposta nelle tre $V\left(\frac{du}{dx}\right)$; $V\left(\frac{du}{dy}\right)$; $V\left(\frac{du}{dz}\right)$. Ed avremo (31) le equazioni

$$V\left(\frac{du}{dx}\right)=S\left(\frac{ds}{dx}\right)+S'\left(\frac{ds'}{dx}\right)+S''\left(\frac{ds''}{dx}\right)\ldots.$$

$$V\left(\frac{du}{dy}\right)=S\left(\frac{ds}{dy}\right)+S'\left(\frac{ds'}{dy}\right)+S''\left(\frac{ds''}{dy}\right)\ldots.$$

$$V\left(\frac{du}{dz}\right)=S\left(\frac{ds}{dz}\right)+S'\left(\frac{ds'}{dz}\right)+S''\left(\frac{ds''}{dz}\right)\ldots.$$

le quali moltiplicate rispettivamente per dx, dy, dz, e poi sommate, rendono appunto

$$V\,du = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''\ldots.$$

789. *Scolio I.* La proposizione è vera, quand'anche il punto A venendo in a trascorresse uno spazio finito. Imperocchè descrivendo il punto A secondo x, y, z gli spazj finiti Δx, Δy, Δz, le mutazioni della retta s corrispondenti a questi tre spazj saranno

$$\frac{x-a}{s}.\Delta x\,;\ \frac{y-b}{s}.\Delta y\,;\ \frac{z-c}{s}.\Delta z\,;\ \text{onde}$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)=\frac{x-a}{s}\,;\ \left(\frac{\Delta s}{\Delta y}\right)=\frac{y-b}{s}\,;\ \left(\frac{\Delta s}{\Delta z}\right)=\frac{z-c}{s}.$$

Dal che avremo nello stesso modo di prima

$$V\,\Delta u = S\,\Delta s + S'\,\Delta s' + S''\,\Delta s''\ldots.$$

790. *Scolio II.* Anche dalle più semplici nozioni elementari si poteva trarre la prova della Proposizione precedente. Siano le due forze (Fig. 70) $AB = S$, $AC = S'$, e la loro risultante $AR = V$, che sarà la diagonale del parallelogrammo $ABRC$. Dicasi l'angolo $BAR = \alpha$, l'angolo $CAR = \beta$,

l' angolo $RAa = \epsilon$. Condotte le normali BM, CN sopra la diagonale AR, sarà per le note proprietà del parallelogrammo, $AR = AM + AN$, e $BM = CN$; o sia

$$V = S \cos.\alpha + S' \cos.\beta$$
$$S \sin.\alpha = S' \sin.\beta$$

Si moltiplichi la prima equazione per cos. ϵ, la seconda per sin. ϵ; e sommandole avremo

$$V \cos.\epsilon = S \cos.(\alpha + \epsilon) + S' \cos.(\beta - \epsilon).$$

Ora condotte dal punto a le normali ab, ac, ar sarà

$$\cos.\epsilon = \frac{Ar}{Aa};\ \cos.(\alpha + \epsilon) = \frac{Ab}{Aa};\ \cos.(\beta - \epsilon) = \frac{Ac}{Aa}.$$

Dunque $V . Ar = S . Ab + S' . Ac$.

Così sommando i momenti di due forze, si ha il momento della loro risultante. E se le forze sono più di due, sommando il momento della risultante delle prime due col momento della terza, si avrà similmente il momento della risultante delle tre forze, il quale per conseguenza sarà eguale alla somma dei momenti di esse. E così si procederà per quanto siano le forze.

791. *Scolio III.* Se lo spazio trascorso dal punto A sulla direzione d' alcuna delle forze non fosse per lo stesso verso per cui tende la forza, ma in senso contrario, il momento di quella forza andrebbe preso negativamente. Così nel parallelogrammo della Fig. 71 sarà $V . Ar = S . Ab - S' . Ac$.

792. *Proposizione II.* Se più forze concorrenti in un punto libero A si fanno equilibrio, sarà la somma de' loro momenti eguale a zero; e viceversa.

Poichè se v' è equilibrio, sarà la risultante $V=0$; onde avremo (788) l'equazione

$$0=S\,ds+S'\,ds'+S''\,ds''\ldots.$$

E viceversa se questa equazione ha luogo, sarà (788) $V\,du=0$. E perchè non può essere $du=0$ per un moto qualunque del punto A, converrà che sia $V=0$; onde saravvi equilibrio.

793. *Scolio I.* Se il punto A sospinto dalle forze S, S', S''.... contro una linea o superficie resistente, sta in equilibrio sopra di essa, dicasi K la pressione che esso esercita contro quella linea o superficie. Questa pressione agirà senza dubbio secondo una retta k perpendicolare ad essa linea o superficie: poichè se agisse obbliquamente, potrebbe risolversi in due, l'una normale, l'altra tangenziale, e con quest'ultima non premerebbe, il che è contro l'ipotesi. Ciò posto s'intenda rimossa quella resistenza, ed in suo luogo sostituita una forza $-K$ agente secondo la retta k. È palese che l'equilibrio sussisterà; ed essendo ora il punto A affatto libero, invece dell'equazione dell'articolo precedente avremo quest' altra

$$0=S\,ds+S'\,ds'+S''\,ds''\ldots.-K\,dk.$$

794. *Scolio II.* Per altro anche in questo caso troverà luogo l'equazione dell' art. 792 quando si supponga che il punto A trapassando nel punto prossimo a movasi sulla linea o superficie anzidetta. Poichè allora lo spazietto Aa sarà una retta infinitesima perpendicolare alla retta k; onde il punto A non s'avanza sulla medesima retta k. Quindi $dk=0$, e torna l'equazione

$$0=S\,ds+S'\,ds'+S''\,ds''\ldots.$$

795. *Proposizione III.* Sia un sistema de' punti A, B, C ec. animati dalle forze S, S', S'' ecc. Sia questo sistema perfettamente libero, ed in equilibrio. Dico che la somma de' momenti delle forze sarà eguale a zero.

Dim. Siano (Fig. 72) i tre punti A, B, C animati dalle forze $AP = S$, $BQ = S'$, $CR = S''$. Uniti questi tre punti colle rette AB, AC, BC, sia $AB = f$, $AC = f'$, $BC = f''$. Dicasi p l'azione che il punto B esercita sul punto A, in virtù della connessione delle parti del sistema; la quale azione sarà diretta per AB, e sarà eguale e contraria a quella che il punto A esercita sopra il punto B: o in altri termini, sia p la tensione della retta AB. E similmente sia p' la tensione della retta AC, e p'' la tensione della retta BC.

Egli è chiaro che nel punto A agiscono le tre forze S, p, p' che debbono equilibrarsi fra loro, indipendentemente dal resto del sistema: poichè tutto il resto del sistema non agisce sopra A, se non appunto per mezzo delle due forze p, p'. E similmente nel punto B si equilibrano fra loro le tre forze S', p, p''; e nel punto C le tre forze S'', p', p''.

Ora dato al sistema un moto minimo quale il permette la connessione delle parti del sistema stesso, trascorra il punto A secondo la retta AP lo spazietto ds, secondo AB lo spazietto df, secondo AC lo spazietto df'. Ed il punto B trascorra secondo le rette BQ, BA, BC gli spazietti ds', $d\varphi$, df''. E finalmente il punto C trascorra secondo CR, CA, CB gli spazietti ds'',

$d\varphi'$, $d\varphi''$. Avremo (792) le tre equazioni

$$o = S\,ds + p\,df + p'\,df'$$
$$o = S'\,ds' + p\,d\varphi + p''\,df''$$
$$o = S''ds'' + p'd\varphi' + p''\,d\varphi''$$

sommando le quali avremo per l'equilibrio di tutto il sistema l'equazione

$$o = S\,ds + S'\,ds' + S''ds''$$
$$+ p(df + d\varphi) + p'(df' + d\varphi') + p''(df'' + d\varphi'')$$

Ma l'equilibrio del sistema sussisterà nè più nè meno, se intendiamo che siano soppresse le forze S, S', S'', e che i punti A, B, C siano tenuti fermi dalle sole tensioni p, p', p'' rivolte in senso contrario. Dunque l'equazione precedente deve tuttavia sussistere, fatto $S = S' = S'' = o$, e cangiato il segno delle forze p, p', p''. Varrà dunque l'equazione

$$o = -p(df + d\varphi) - p'(df' + d\varphi') - p''(df'' + d\varphi'')$$

che sommata colla precedente lascia

$$o = S\,ds + S'\,ds' + S''ds''$$

Intendesi agevolmente come questa dimostrazione si estenda a qualsivoglia numero de' punti componenti il sistema.

796. *Scolio I.* La dimostrazione si applica egualmente a' sistemi rigidi, e a quelli di forma variabile. Ma per i primi si potrebbe conchiudere anche nel modo seguente. La verga rigida $A\,B$ non può spostarsi se non per moto composto di moto progressivo, e di moto rotatorio. Ora per un moto progressivo qualunque della retta $A\,B$, è chiaro che i due termini A, B si avanzano egualmente e per lo stesso verso secondo $A\,B$: e per un moto rotatorio minimo, è pure chiaro, che siccome en-

trambi i punti A, B descrivono rette infinitesime perpendicolari alla AB, così nissuno di essi si avanza secondo la stessa AB. Adunque dato al sistema un moto minimo, gli spazietti percorsi dai due punti A, B sulla direzione della forza p debbono necessariamente essere uguali, e rivolti per lo stesso verso. Siccome poi quella forza p agisce ne' due punti A, B con direzioni opposte fra loro, così l' uno di questi spazietti sarà necessariamente percorso secondo la direzione della forza p, e l' altro contro la direzione di essa forza. Dunque sarà ne' sistemi rigidi $d\phi = -df$. E similmente si troverà $d\phi' = -df'$ e $d\phi'' = -df''$. Onde l' equazione dell' articolo precedente si riduce tosto ad essere

$$0 = Sds + S'ds' + S''ds'' \ldots .$$

797. *Scolio II.* Se fosse nel sistema alcun punto fisso, sia H la pressione che questo sostiene, e sia la sua direzione una retta h. Sussisterà l' equilibrio, anche rimosso quel fulcro, se in sua vece s' intenda applicata quivi al sistema una forza $-H$ diretta secondo h. Sarà allora come se il sistema fosse libero, ed avrà luogo l' equazione

$$0 = Sds + S'ds' + S''ds'' \ldots - Hdh.$$

798. *Scolio III.* Similmente se fosse nel sistema alcun punto appoggiato e sospinto contro una superficie resistente, sia K la pressione che ne risente la superficie, diretta secondo la normale k. E l' equilibrio non si turberà, se si rimova quella resistenza, ed invece si aggiunga al sistema la forza $-K$ agente secondo k: con questo l' equazione diventerà

$$0 = Sds + S'ds' + S''ds'' \ldots - Kdk$$

799. *Scolio IV.* Quel moto minimo che si suppone concepire il sistema, e da cui si misurano le velocità virtuali e i momenti delle forze, fingiamo che sia non un moto qualunque, ma quale il permettono gli ostacoli che trattengono il sistema. In questo caso dovremo intendere che i punti fissi restino fermi; onde sarà $dh = 0$. E similmente dovremo intendere che i punti sospinti contro una linea o superficie resistente si movano su quella descrivendo una retta infinitesima che sarà perpendicolare alla k; onde sarà $dk = 0$. In tale ipotesi adunque si ottiene di bel nuovo l' equazione

$$0 = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds'' \ldots.$$

come pei sistemi liberi.

800. *Scolio V.* Adunque in un sistema equilibrato, la somma de' momenti delle forze si troverà eguale a zero per ogni moto minimo conciliabile colla costituzione, e colle condizioni particolari del sistema. E si troverà ancora eguale a zero per un moto minimo qualunque, purchè tra le forze applicate al sistema si contino anche le reazioni o resistenze degli ostacoli che lo trattengono.

801. *Proposizione IV.* Viceversa se la somma de' momenti delle forze applicate al sistema è uguale a zero, sarà quel sistema in equilibrio.

Dim. Sia il sistema de' punti A, B, C ec. animati dalle forze S, S', S'' ec. e sia la somma de' loro momenti eguale a zero. Se il sistema non è in equilibrio, prendano dunque i punti A, B, C ec. le velocità v, v', v'' ec. per cui nell' istante dt percorrano gli spazietti $v\,dt$, $v'\,dt$, $v''\,dt$ ec. Ora se ai punti A, B, C ec. già investiti delle forze

S, S', S'' ec. aggiungiamo le forze $-v$, $-v'$, $-v''$ ec. le quali distruggano ne' suddetti punti quelle velocità iniziali v, v', v'' ec. egli è evidente che coll'aggiunta di queste nuove forze il sistema adesso sarà in equilibrio. Essendo adunque i momenti di queste nuove forze $-v^2 dt$, $-v'^2 dt$, $-v''^2 dt$ ec. avremo (795)

$$o = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds'' \ldots\ldots$$
$$- v^2\,dt - v'^2\,dt - v''^2\,dt \ldots$$

Ma già per ipotesi è

$$o = S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds'' \ldots\ldots$$

Dunque sarà ancora $o = v^2 + v'^2 + v''^2 \ldots\ldots$ la qual equazione non può verificarsi quando non sia $v = o$, $v' = o$, $v'' = o$ ec. Quando dunque la somma de' momenti delle forze è uguale a zero, i punti A, B, C ec. non ponno concepire moto veruno, ed è il sistema in equilibrio.

CAP. II.

Teoremi statici dedotti dal principio delle velocità virtuali.

802. *Proposizione I.* Nella leva retta due pesi reciprocamente proporzionali alle loro distanze dal fulcro, si fanno equilibrio.

Questa Proposizione sulla quale si appoggia tutta la Teoria delle Macchine, e che perciò viene annoverata tra i principj della Statica, si deduce immediatamente dal principio delle velocità virtuali. Supposta una rotazione minima della leva AFB (Fig. 73) attorno al fulcro F, per cui ella

passi in CFD, e condotte le orizzontali Ca, Db, è palese che le velocità virtuali Aa, Bb dei due pesi P, Q sono proporzionali alle distanze AF, BF. Ora pel principio delle velocità virtuali dev' essere (795) $P \cdot Aa - Q \cdot Bb = o$. Dunque $P : Q :: Bb : Aa :: BF : AF$.

Con eguale facilità nella leva inflessa AFB (Fig. 74) si troverebbe $Aa : Bb :: MF : NF$; e quindi per l'equilibrio dover essere $P : Q :: NF : MF$.

803. *Proposizione II.* Sia un sistema di pesi in equilibrio; dato al sistema un moto minimo qualunque, il centro di gravità del sistema non s' alza, nè s' abbassa.

Dim. Siano i pesi S, S', S'' ec. e siano s, s', s'' ec. le verticali condotte dal centro di gravità di ciascun peso, e terminate ad un piano orizzontale qualunque. Sia Z l' altezza del centro di gravità del sistema sopra questo piano; e sarà (48)

$$Z = \frac{Ss + S's' + S''s'' \ldots}{S + S' + S'' \ldots}$$

Ora s' imprima al sistema un moto minimo per cui le verticali s, s', s'' ec. divengano $s + ds$, $s' + ds'$, $s'' + ds''$ ec. e Z diventi $Z + dZ$. Sarà

$$dZ = \frac{Sds + S'ds' + S''ds'' \ldots}{S + S' + S'' \ldots}$$

Ma per ipotesi il sistema è in equilibrio; dunque (795) $Sds + S'ds' + S''ds'' \ldots = o$: dunque $dZ = o$, e l' altezza Z è costante.

804. *Coroll. I.* E viceversa se un sistema di pesi sarà talmente disposto che per un moto minimo qualunque il suo centro di gravità non s' alzi nè s' abbassi, quel sistema sarà in equilibrio.

Fu questo Teorema proposto da Torricelli, che ne dedusse la legge dell' equilibrio di due pesi nel piano inclinato; e si può egualmente ritrarne la legge dell' equilibrio in tutte le altre macchine nelle quali più pesi si equilibrano fra loro.

805. *Coroll. II.* Essendo $dZ = 0$, sarà generalmente parlando Z un massimo, o un minimo. Dal che si deduce che in un sistema equilibrato di pesi, l' altezza del centro di gravità sopra l' orizzonte è la massima o la minima di quelle che avrebbon luogo se il sistema perdesse la situazion d' equilibrio, da qualunque parte esso piegasse.

Se quell' altezza è un minimo, il centro di gravità occupa il sito più basso; e turbato il sistema in qualunque modo, il centro di gravità viene ad alzarsi. Cessando la cagione perturbatrice, questo centro tornerà a discendere, e però il sistema si ricomporrà nella situazione d' equilibrio. Così avviene in una bilancia, nella quale il centro di gravità cada al di sotto del centro del moto.

Se poi quell' altezza è un massimo, il centro di gravità sta nel sito più alto, e da qualunque parte crolli il sistema, esso centro viene ad abbassarsi. Cessando la cagione perturbatrice, il centro discenderà tuttavia, ed il sistema si allontanerà sempre più dalla situazione d' equilibrio. Così trabocca una bilancia nella quale il centro di gravità sia posto al di sopra del centro del moto.

806. *Proposizione III.* Sia un sistema di punti sollecitati per le rette s, s', s'' ec. dalle forze S, S', S'' ec. tali che la funzione $S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''$ ec. sia una differenziale esatta $= d\varphi$. Se il sistema

è in equilibrio, sarà la funzione ϕ un massimo o un minimo; e viceversa.

Ancor questo Teorema proposto da Maupertuis è una conseguenza immediata del principio delle velocità virtuali. Poichè se v' ha equilibrio, dovrà essere (795) $d\phi = o$, onde ϕ un massimo o un minimo; e viceversa.

Che anzi la proposizione inversa è sempre e generalmente vera: la diretta è soggetta a qualche eccezione, potendo darsi caso che sia $d\phi = o$, e tuttavia la funzione ϕ non sia nè massima nè minima.

807. *Scolio*. Le forze agenti nella natura sono sempre tali che la funzione $S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''$ ec. è una differenziale esatta, ed ha luogo il Teorema precedente. Poichè queste forze o sono costanti, ed indipendenti dalla situazione de' punti ai quali si applicano, o sono attrazioni dirette ad un centro, e funzioni delle distanze che separano il punto sul quale agisce la forza da questo centro, cosicchè prendendo queste distanze medesime per le rette s, s', s'' ec. saranno le forze S, S', S'' ec. o costanti, o funzioni di s, s', s'' ec. rispettivamente. In entrambi i casi è manifesto che la formola $S\,ds + S'\,ds' + S''\,ds''$ ec. riesce una differenziale esatta $= d\phi$.

CAP. III.

Come dal principio delle Velocità virtuali si deducano le condizioni e le equazioni dell' equilibrio.

808. Passiamo ora a dichiarare, seguendo sempre la scorta del ch. sig. la Grange, l' uso del principio delle velocità virtuali nella risoluzione de' Problemi Statici. Nel che prima di scendere a' casi particolari fia bene segnare generalmente le tracce da seguirsi. Sia dunque un sistema de' punti A, B, C ec. sollecitati dalle forze S, S', S'' ec. Riferito questo sistema a tre assi ortogonali, siano x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' ec. le coordinate de' punti A, B, C ec. Ciascuna forza come S si risolva nelle tre P, Q, R dirette secondo le x, y, z; e così la forza S' nelle tre P', Q', R' ec. Eguagliando a zero la somma de' momenti (795) avremo per l' equazione generale dell' equilibrio

$$(A) \quad 0 = P dx + P' dx' + P'' dx'' \ldots$$
$$+ Q dy + Q' dy' + Q'' dy'' \ldots$$
$$+ R dz + R' dz' + R'' dz'' \ldots$$

809. Se tutti i punti A, B, C ec. del sistema fossero liberi, e fra loro sconnessi, cosicchè ogni punto potesse cangiar luogo indipendentemente dagli altri, le variazioni delle coordinate dx, dy, dz, dx' ec. sarebbero tutte arbitrarie ed indipendenti fra loro, e dovrebbe l' equazione (A) verificarsi qualunque valore si attribuisse a codeste variazioni. Quindi bisognerebbe porre eguali a zero

i loro coefficienti, e si avrebbero le equazioni $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $P' = 0$ ec. tre volte tante quanti sono i punti componenti il sistema.

810. Ma se quei punti sono ritenuti o da ostacoli esterni, o da spranghe che li congiungano fra loro, o in tutt' altra guisa, per modo che determinato ad arbitrio il moto d'alcuni di quei punti, gli altri siano obbligati a seguirli scorrendo per date linee; le variazioni dx, dy, dz, dx' ec. non sono più allora arbitrarie, ma dipendono dalla costituzione e dalle condizioni particolari del sistema. Conviene allora esprimere queste condizioni con equazioni atte ad esprimere i rapporti che debbon passare tra le variazioni delle coordinate. Per mezzo di queste equazioni si elimineranno dall'equazione (A) altrettante di queste variazioni dx, dy ec. Quelle che restano, saranno adesso arbitrarie e indipendenti fra loro. Si pongano eguali a zero i loro coefficienti; e si avranno le equazioni che rappresentano l'equilibrio del particolare sistema proposto.

811. A queste equazioni si può pervenire anche col metodo seguente. L'equilibrio del sistema deve sussistere anche se s'intendano tolti via gli ostacoli che fermano i punti del sistema, le spranghe che li legano, ec. purchè a' quei punti s'intendano applicate delle forze eguali e contrarie alle azioni che il sistema esercitava contro quegli ostacoli. S'intendano adunque ai punti A, B, C ec. oltre le forze S, S', S'' ec. applicate le forze $-p$, $-q$, $-r$ ec. esprimenti le reazioni degli ostacoli che trattengono il sistema, e nell' equazione (A) si comprendano anche i momenti di queste forze. Sarà allora come

se tutti i punti del sistema fossero liberi; tutte le variazioni dx, dy, dz ec. tornano arbitrarie, e posti eguali a zero i loro coefficienti, forniranno altrettante equazioni. Da queste poi dovranno eliminarsi le quantità p, q, r ec. e le equazioni che rimangono saranno desse che esprimono l' equilibrio del proposto sistema.

Questo secondo metodo ha un vantaggio sopra del primo, poichè oltre le condizioni dell' equilibrio ne dà a conoscere i valori di p, q, r ec. o sia delle azioni che il sistema esercita contro gli ostacoli; come sono le pressioni de' fulcri, le tensioni delle spranghe o delle funi ec.

812. Di questi due metodi si potrà scegliere nei particolari Problemi quello che porga maggiore facilità. E gioverà molto l' industria nell' esprimere le condizioni del sistema colle equazioni più acconcie a potersi combinare coll' equazione (A) ed agevolare l' eliminazione delle indeterminate. Il che meglio apparirà negli esempj.

813. *Proposizione I.* Determinare le condizioni d' equilibrio d' un punto libero.

L' equazione (A) diventa in questo caso $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Onde avremo (809) $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Si confronti l' art. 95.

814. *Proposizione II.* Determinare le condizioni d' equilibrio d' un punto appoggiato ad una superficie resistente.

Sia l' equazione di questa superficie $ldx + mdy + ndz = 0$. Con essa elimineremo (810) dall' equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ l' indeterminata dx, onde resterà

$$(Pm - Ql)\,dy + (Pn - Rl)\,dz = 0$$

Dunque dovrà essere $Pm - Ql = 0$, $Pn - Rl = 0$, ossia $P : Q : R :: l : m : n$. Si confronti l' art. 102.

815. *Proposizione III.* Determinare le condizioni d' equilibrio d' un sistema rigido.

Un tale sistema non può spostarsi se non per moto progressivo, o per moto rotatorio attorno alcuno de' tre assi ortogonali, o per moto composto d' alcun di questi. Or supposto un moto progressivo qualunque, avremo $dx = dx' = dx''$ ec. $dy = dy' = dy''$ ec. $dz = dz' = dz''$ ec. Posti questi valori nell' equazione (A) e servendoci del simbolo Σ per denotare compendiosamente la somma delle quantità omologhe attenenti a' diversi punti del sistema, onde sia per esempio $\Sigma . P = P + P' + P''$ ec. quell' equazione diventa

$$0 = dx \Sigma . P + dy \Sigma . Q + dz \Sigma . R$$

onde abbiamo queste tre condizioni d' equilibrio $\Sigma . P = 0$; $\Sigma . Q = 0$; $\Sigma . R = 0$.

Supposta una rotazione minima $d\phi$ attorno OZ (Fig. 75) asse delle z, avremo in primo luogo

$$dz = dz' = dz'' \text{ ec. } \dots = 0$$

Poscia i triangoli simili OPQ, Qrq danno

$$OQ : Qq :: PQ : qr :: OP : Qr; \text{ o sia}$$

$$1 : d\phi :: y : dx :: x : -dy; \text{ onde}$$

$$dx = y\, d\phi; \quad dy = -x\, d\phi$$

e similmente

$$dx' = y'\, d\phi; \quad dy' = -x'\, d\phi$$

$$dx'' = y''\, d\phi; \quad dy'' = -x''\, d\phi \quad \text{ec.}$$

Con questo l' equazione (A) dà immediatamente $0 = \Sigma . Py - \Sigma . Qx$; o sia $\Sigma . Py = \Sigma . Qx$.

In simil guisa supposta una rotazione infinitesima attorno OY, si avrà la quinta condizione

$\Sigma . Pz = \Sigma . Rx$; e supposta la rotazione attorno OX, si avrà la sesta $\Sigma . Qz = \Sigma . Ry$.

816. *Scolio I.* Questa è la via più breve per dedurre dal principio delle velocità virtuali le condizioni d'equilibrio d'un sistema rigido. Potremmo giungervi anche per altra strada tenendo sempre la traccia dell' art. 810, ma esprimendo in diversa guisa la condizione dell' invariabilità del sistema. Siano f, g, h ec. le rette AB, AC, BC ec. che uniscono i punti A, B, C ec. del sistema; e sarà

$$f = \sqrt{\left((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2\right)}$$

$$g = \sqrt{\left((x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2\right)}$$

$$h = \sqrt{\left((x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2\right)}$$

Ora per la forma invariabile del sistema queste distanze f, g, h ec. debbono rimanersi invariate, comunque il sistema si muova. Quindi le equazioni $df = 0$, $dg = 0$, $dh = 0$ ec. mercè le quali potremo eliminare dall' equazione (A) altrettante fra le indeterminate dx, dy, dz, dx' ec. Ed eguagliando a zero i coefficienti di quelle che vi rimangono, ci risulteranno le stesse sei equazioni di prima.

817. *Scolio II.* E può vedersi anche senza compiere il calcolo, che per quanti siano i punti componenti il sistema, le equazioni finali saranno sempre sei, nè più, nè meno Già se quei punti sono tre, l' equazione (A) porterà nove indeterminate, fra le quali eliminandone tre colle tre equazioni $df = 0$, $dg = 0$, $dh = 0$ rimarranno sei indeterminate arbitrarie, ed altrettante equazioni.

Che se i punti sono più di tre, per ogni punto che s'aggiunge s'accrescono nell'equazione (A) tre nuove indeterminate; ma s'accrescon anche tre nuove equazioni colle quali eliminarle. Infatti il sito del nuovo punto è determinato dalle sue distanze dai tre primi. Siano queste distanze f', g', h', ed avremo le tre nuove equazioni $df' = 0$, $dg' = 0$, $dh' = 0$. Quindi al termine delle eliminazioni rimarranno sempre nell'equazione (A) sei indeterminate arbitrarie come prima.

818. *Scolio III.* Finalmente si potrebbe anche tenere il metodo dell'art. 811 esprimendo con p, q, r ec. le tensioni delle rette f, g, h ec. ed aggiungendo all'equazione (A) i termini $-p\,df - q\,dg - r\,dh$ ec. Allora riguardando tutte le indeterminate siccome arbitrarie, si eguaglierà a zero il coefficiente di ciascuna; ed eliminate le quantità p, q, r ec. si arriverà alle stesse equazioni ultime, con di più il vantaggio di poter determinare le tensioni medesime p, q, r ec.

819. *Proposizione IV.* Determinare le condizioni di equilibrio del Poligono funicolare, supponendo che a tutti i termini dei lati siano applicate delle forze qualunque.

Decomposte queste forze parallelamente ai tre assi, avremo (808) l'equazione (A). Qui le indeterminate dx, dy, dz, dx' ec. saranno tre volte tante quanti sono i termini de' lati del poligono. Onde se il numero de' termini è m, sarà il numero delle indeterminate $3m$.

Ora siano i lati del poligono f, g, h ec. Poichè questi lati non possono allungarsi, avremo le

equazioni di condizione $df = 0$, $dg = 0$, $dh = 0$ ec. tante, quanti sono i lati del poligono, vale a dire $m - 1$. Per via di queste elimineremo nell' equazione (A) altrettante indeterminate; ve ne rimarranno $2m + 1$ arbitrarie. Eguaglieremo a zero i loro coefficienti; e saranno queste le equazioni o condizioni d' equilibrio del proposto poligono.

820. *Coroll. I.* Oppure chiamando p, q, r ec. le tensioni delle funi f, g, h ec. si formerà l' equazione

(A) $$- p\,df - q\,dg - r\,dh \ldots\ldots = 0$$

e procedendo col metodo indicato all' art. 818 si arriverà alle stesse equazioni.

821. *Coroll. II.* E qui giova avvertire che potremo sempre determinare la situazione di tutti i termini dei lati, ed in conseguenza di tutto il poligono; poichè se alle equazioni che esprimono le condizioni dell' equilibrio in numero di $2m + 1$ aggiungiamo le equazioni di condizione $df = 0$ ec. in numero di $m - 1$, abbiamo fra le coordinate dei vertici del poligono $3m$ equazioni; tante appunto quante bastano per determinar tutte le coordinate.

822. *Coroll. III.* Se il poligono è chiuso, il numero de' termini sarà uguale al numero dei lati; onde le variazioni arbitrarie, e per conseguenza le equazioni dell' equilibrio saranno solamente $2m$.

823. *Coroll. IV.* Se i termini estremi del poligono sono fissi, vi saranno nell' equazione (A) sei indeterminate di meno, perchè mancheranno le sei variazioni appartenenti ai due termini fissi; onde le equazioni dell' equilibrio resteranno solamente $2m - 5$.

Che se i capi del poligono non fossero fissi, ma solamente obbligati a scorrere sopra date superficie, le equazioni di queste superficie serviranno ad eliminare nell' equazione (A) due indeterminate; cosicchè il numero delle equazioni finali si ristringerà a $2m - 1$.

824. *Coroll. V.* Ma ordinariamente tornerà più comodo cercar prima le condizioni d'equilibrio del poligono riguardando i capi del medesimo siccome fissi; e determinare le tensioni delle funi estreme. Allora se i capi del poligono non sono fissi, bisognerà di più che queste tensioni facciano equilibrio a quelle forze o resistenze che sono ad essi capi applicate.

825. *Coroll. VI.* Se alcuno de' nodi ai quali sono applicate le forze fosse scorrevole, quello per esempio che unisce i lati f, g; allora non è più necessario che f e g siano costanti, ma basterà che lo sia la loro somma $f + g$. Quindi in vece delle due equazioni $df = 0$, $dg = 0$ abbiamo l' equazione unica $df + dg = 0$. Abbiamo dunque un' indeterminata di meno da eliminare; e però avremo una condizione di più per l' equilibrio.

826. *Scolio.* Ne' sistemi che sino ad ora abbiam contemplati, erano le forze applicate a punti separati l' uno dall' altro. Or volendo sottoporre allo stesso metodo un sistema continuo, converrà distinguere quelle variazioni delle coordinate che nascono quando da un punto del sistema passiamo ad un altro, da quelle che nascono quando quel primo punto si muta di luogo mercè quel moto minimo del sistema da cui misuriamo le velocità virtuali delle forze e i loro momenti. Le prime variazioni

denoteremo coi soliti segni dx, dy, dz; le seconde coi segni δx, δy, δz. Siano x, y, z le coordinate d' un punto M. Quelle del punto prossimo saranno $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; quelle poi dello stesso punto M trasportato altrove pel moto minimo del sistema saranno $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. E se il punto M è sollecitato dalle forze P, Q, R secondo le coordinate x, y, z, saranno i momenti di queste forze $P\delta x$, $Q\delta y$, $R\delta z$.

Pel principio delle velocità virtuali devesi raccogliere ed eguagliare a zero la somma de' momenti di tutte le forze che sollecitano il sistema; e questa sarà l' equazion generale dell' equilibrio. Ora io dico che se i punti estremi del sistema sono fissi, questa equazione potrà sempre ridursi alla forma seguente

$$\int (L\delta x + M\delta y + N\delta z) = 0$$

dove il segno $\int$ denota l' integrale o la somma de' momenti $L\delta x$, $M\delta y$ ec. estesa per tutta l' ampiezza del sistema proposto.

Imperocchè quand' anche sotto il segno $\int$ s' incontrassero de' termini della forma $A\delta dx$, $A\delta ddx$ ec. questi si potranno sempre trasformare come segue. In primo luogo poichè le variazioni espresse dai segni d, δ sono affatto indipendenti tra loro, si possono questi segni permutare a piacere, onde in vece di $A\delta dx$, $A\delta ddx$ ec. si potrà scrivere $Ad\delta x$, $Add\delta x$ ec. Poscia integrando per parti abbiamo

$$\int Ad\delta x = A\delta x - \int dA . \delta x$$

e stendendo l' integrale a tutta l' ampiezza del sistema

$$\int Ad\delta x = A''\delta x'' - A'\delta x' - \int dA . \delta x$$

ove $A'\delta x'$ è il valore che acquista. $A\delta x$ nel primo punto del sistema, ed $A''\delta x''$ quello che acquista nell' ultimo punto del sistema stesso. Ma questi punti sono fissi per ipotesi; dunque $\delta x' = \delta x'' = 0$; onde $\int A\, d\delta x = -\int dA \,.\, \delta x$

E nello stesso modo si troverà

$$\int A\, dd\delta x = \int ddA \,.\, \delta x$$

Con queste trasformazioni noi potremo sempre condurre l'equazione dell'equilibrio alla divisata forma.

Ciò posto, se gli elementi del sistema fossero del tutto sciolti e sconnessi, le variazioni δx, δy, δz sarebbono arbitrarie ed indipendenti fra loro; e l' equazione dell' equilibrio trarrebbe con se (809) queste tre $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. Ma se v' ha legame tra le parti del sistema per cui quelle variazioni dipendano l' una dall' altra, converrà chiamare in sussidio (810) l' equazioni che esprimono questa relazione, onde eliminar di queste variazioni quante più si può, indi eguagliare a zero i coefficienti di quelle che restano. Oppure converrà (811) contare tra le forze applicate agli elementi del sistema anco le reazioni degli ostacoli che li trattengono; che così le variazioni δx, δy, δz tornano tutte indipendenti fra loro, e si procede come nel primo caso.

Che se i punti estremi del sistema non sono fissi, converrebbe avere riguardo anche ai termini $A'\delta x'$ ec. Ma ordinariamente tornerà più comodo ricercare a parte le condizioni d' equilibrio di questi punti, a quel modo che fu indicato nell'art. 824.

827. *Proposizione V.* Trovare la curva d' equilibrio d' un filo flessibile sollecitato in tutti i suoi elementi da date forze.

Suppongo che le forze che tirano gli elementi del filo agiscano tutte nello stesso piano, onde tutta sarà distesa in quel piano la curva del filo. Siano $P\,ds$, $Q\,ds$ le forze che sollecitano il latercolo ds secondo le x, y; e sia T la tensione di quel latercolo. Riguardando la curva come un poligono funicolare d' infiniti lati, ds rappresenterà uno qualunque, come f, de' lati del poligono; e l' equazion del poligono (820) diventerà per la curva

$$\int (P\,ds\,\delta x + Q\,ds\,\delta y - T\,\delta ds) = 0$$

Ora per ridurre quest' equazione alla forma proposta nell' art. 826, osservo essere

$$\delta ds = \delta \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy$$

Abbiamo poi (826)

$$\int \frac{T\,dx}{ds}\,\delta dx = -\int d\,.\,\frac{T\,dx}{ds}\,.\,\delta x$$

$$\int \frac{T\,dy}{ds}\,\delta dy = -\int d\,.\,\frac{T\,dy}{ds}\,.\,\delta y$$

Con queste sostituzioni l' equazione diventa

$$\int \left(P\,ds + d\,.\,\frac{T\,dx}{ds}\right)\delta x + \int \left(Q\,ds + d\,.\,\frac{T\,dy}{ds}\right)\delta y = 0$$

Quindi eguagliando a zero i coefficienti delle variazioni δx, δy si hanno le equazioni

$$P\,ds + d\,.\,\frac{T\,dx}{ds} = 0\ ; \quad Q\,ds + d\,.\,\frac{T\,dy}{ds} = 0$$

onde $-\frac{T\,dx}{ds} = \int P\,ds\ ; \quad -\frac{T\,dy}{ds} = \int Q\,ds$

ed eliminando T

$$dy \int P\,ds - dx \int Q\,ds = 0$$

equazione cercata. Si confronti l' art. 165.

CAP. IV.

Principio delle velocità virtuali applicato ai corpi in moto.

828. Insegnò già il sig. d' Alembert (299) per qual via possano dedursi le leggi del moto d' un sistema da quelle dell' equilibrio. Avendo noi pertanto dal principio delle velocità virtuali conseguita (808) un' equazion generale (A) atta a rappresentare l' equilibrio d' un sistema da date forze animato, potremo ora similmente ricavarne un' altra atta a determinare il moto che dall' azione di quelle forze sarà impresso al sistema.

829. Siano i punti A, B, C ec. tra se collegati in qualsivoglia modo, e sollecitati da date forze. Siano P, Q, R le forze acceleratrici che sollecitano il punto A secondo le sue coordinate x, y, z; e scorso il tempo t movasi quel punto colla velocità V, la quale si risolva nelle tre velocità u, v, w secondo x, y, z rispettivamente. Nell' istante susseguente esso avrà le velocità $u+du$, $vd+v$, $w+dw$. Ma per l' azione libera delle potenze acceleratrici dovrebbe aver concepite (206) le velocità $u+Pdt$, $v+Qdt$, $w+Rdt$. Dunque rimangono spente pel contrasto tra le parti del sistema le velocità $Pdt-du$, $Qdt-dv$, $Rdt-dw$. Parimente se distinguiamo con un accento le quantità omologhe appartenenti al punto B, troveremo che esso perde le velocità $P'dt-du'$, $Q'dt-dv'$, $R'dt-dw'$, e così degli altri. Ora

le forze corrispondenti a queste velocità perdute deggiono (299) equilibrarsi fra loro. Dunque se io supporrò i punti A, B, C ec. animati soltanto da queste forze $P\,dt - du$ ec. ed immaginerò che il sistema prenda un moto minimo conciliabile colle condizioni particolari di esso sistema, pel qual moto le coordinate x, y, z del punto A ricevano le variazioni δx, δy, δz, e le coordinate x', y', z' del punto B ricevano le variazioni $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ ec. avrò pel principio delle velocità virtuali questa equazione

$$(B)\quad 0 = (P\,dt - du)\,\delta x + (P'\,dt - du')\,\delta x' \ldots$$
$$+ (Q\,dt - dv)\,\delta y + (Q'\,dt - dv')\,\delta y' \ldots$$
$$+ (R\,dt - dw)\,\delta z + (R'\,dt - dw')\,\delta z' \ldots$$

830. Dividendo per l' elemento del tempo dt che riguarderemo come costante, ed avvertendo essere (206) $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$, l' equazione (B) può anche rappresentarsi sotto questa forma

$$(B)\quad 0 = \left(P - \frac{ddx}{dt^2}\right)\delta x + \left(P' - \frac{ddx'}{dt^2}\right)\delta x' \ldots$$
$$+ \left(Q - \frac{ddy}{dt^2}\right)\delta y + \left(Q' - \frac{ddy'}{dt^2}\right)\delta y' \ldots$$
$$+ \left(R - \frac{ddz}{dt^2}\right)\delta z + \left(R' - \frac{ddz'}{dt^2}\right)\delta z' \ldots$$

831. Ora se i punti del sistema fossero sciolti d' ogni vincolo, le variazioni δx; δy, δz, $\delta x'$ ec. sarebbono tutte arbitrarie; si dovrebbero adunque eguagliare a zero i loro coefficienti, ed avremmo per determinare il moto del punto A le tre equazioni $P\,dt = du$, $Q\,dt = dv$, $R\,dt = dw$; ovvero

$P=\frac{ddx}{dt^2}$, $Q=\frac{ddy}{dt^2}$, $R=\frac{ddz}{dt^2}$; e pel moto del punto B le tre equazioni $P'dt=du'$, $Q'dt=dv'$, $R'dt=dw'$ ec.

Ma stante il vincolo che lega i punti del sistema, converrà servirsi delle equazioni di condizione onde eliminare dall' equazione (B) quante più si potrà delle indeterminate δx, δy ec. Oppure converrà contare tra le forze applicate al sistema anche le reazioni degli ostacoli. In somma dovrà trattarsi l' equazione (B) come insegnammo doversi fare dell' equazione (A) agli articoli 809. 810. 811.

832. Se il punto A fosse il centro di gravità d' una massa m, animata in tutti i suoi elementi dalle potenze acceleratrici P, Q, R, le forze agenti sul punto A sarebbero mP, mQ, mR; e le forze estinte sarebbero $m\,(Pdt-du)$, $m\,(Qdt-dv)$, $m\,(Rdt-dw)$. E se parimente ne' punti B, C ec. siano le masse m', m'' ec. si vede che per adattare l' equazione (B) a questo sistema di masse conviene in luogo di δx, δy, δz mettere $m\delta x$, $m\delta y$, $m\delta z$, ed in luogo di $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ mettere $m'\delta x'$, $m'\delta y'$, $m'\delta z'$ ec.

CAP. V.

Teoremi dinamici per lo stesso principio dimostrati.

833. *Proposizione I.* Il centro di gravità d' un sistema libero così si muove, come se tutta la massa del sistema vi fosse riunita, e tutte le forze vi fossero immediatamente applicate.

Sia formato il sistema delle masse m, m', m'' ec. sollecitate dalle forze acceleratrici P, Q, R; P', Q', R' ec. Intendo per centro di gravità del sistema il centro di gravità delle masse m, m', m'' ec. considerate come se fossero altrettanti pesi; e dico che se il sistema è libero, vale a dire senza ritegno di punti fissi, o altri ostacoli esterni, questo centro di gravità così si muove come farebbe una sola massa $\Sigma . m$ eguale alla massa dell' intero sistema, ch' io chiamerò M, sollecitata dalle forze $\Sigma . m P$, $\Sigma . m Q$, $\Sigma . m R$.

Dim. Valendo l' equazione (B) per ogni moto minimo conciliabile colle condizioni del sistema, varrà anche per un moto progressivo; giacchè se il sistema è libero, può senza dubbio concepire un tal moto. Or supposto un moto progressivo qualunque sarà $\delta x = \delta x' = \delta x''$ ec. $\delta y = \delta y' = \delta y''$ ec. $\delta z - \delta z' = \delta z''$ ec. Ponendo nell' equazione (B) questi valori, indi eguagliando a zero i coefficienti delle variazioni residue δx, δy, δz avremo

$$\Sigma . m P = \Sigma . \frac{mddx}{dt^2}; \; \Sigma . m Q = \Sigma . \frac{mddy}{dt^2}; \; \Sigma . m R = \frac{mddz}{dt^2}$$

Or siano X, Y, Z le coordinate del centro di gravità; sarà

$$\Sigma . m x = M X; \; \Sigma . m y = M Y; \; \Sigma . m z = M Z$$

onde

$$\Sigma . \frac{mddx}{dt^2} = \frac{MddX}{dt^2}; \; \Sigma . \frac{mddy}{dt^2} = \frac{MddY}{dt^2}; \; \Sigma . \frac{mddz}{dt^2} = \frac{Mddz}{dt^2}$$

Dunque

$$\frac{\Sigma . m P}{M} = \frac{ddX}{dt^2}; \; \frac{\Sigma . m Q}{M} = \frac{ddY}{dt^2}; \; \frac{\Sigma . m R}{M} = \frac{ddZ}{dt^2}$$

Ma queste equazioni sono appunto (831) quelle che determinano il moto d' un punto sollecitato dalle

forze acceleratrici $\frac{\Sigma . m P}{M}$, $\frac{\Sigma . m Q}{M}$, $\frac{\Sigma . m R}{M}$; ovvero, il che torna allo stesso, d' una massa M sollecitata dalle forze $\Sigma . m P$, $\Sigma . m Q$, $\Sigma . m R$. Dunque ec.

834. *Coroll. I.* Se non vi sono forze acceleratrici, ed il sistema si muove solo per velocità preconcepite, o per impulsi momentanei comunicati alle diverse masse m, m', m'' ec. il centro di gravità cammina equabilmente in linea retta.

835. *Coroll. II.* Lo stesso avviene se le forze acceleratrici consistono in attrazioni scambievoli d' una massa verso dell' altra, o d'un punto verso dell'altro.

Poichè siccome l' attrazione del punto A sopra B è uguale e contraria a quella del punto B sopra A, ed è così di tutti gli altri punti, è palese che trasportate tutte queste forze nel centro di gravità, la risultante sarà nulla. Adunque per esse il centro di gravità non concepirà verun moto; nè potrà muoversi se non per le velocità preconcepite, o per gl' impulsi momentanei comunicati al sistema; e questo moto è necessariamente (834) uniforme e rettilineo.

836. *Coroll. III.* Di qui si raccoglie che l'azione scambievole fra le parti d' un sistema libero non apporta verun cambiamento al moto del suo centro di gravità. Nel che consiste il principio conosciuto in meccanica sotto il nome di *Conservazione del moto del centro di gravità.*

837. Movasi un punto per la curva BMS (Fig. 75) descrivendo nell' istante $d\,t$ l' archetto $M\,m$. Se da un *centro* O conduco i *raggi vettori* $O\,M$, $O\,m$, il

triangolo MOm si dirà l'*Area elementare* descritta nell' istante dt attorno il centro O. La somma di tutte le aree elementari costituisce l' *Area* intera descritta nel tempo t.

Sia Qq la projezione dell' archetto Mm, ed OQ, Oq le projezioni de' raggi vettori OM, Om sopra un piano qualunque XOY. Il triangolo QOq sarà la projezione dell' area elementare; e la somma di tutte queste projezioni costituisce la projezione dell' area intera descritta nel tempo t dal punto M attorno il centro O.

838. *Lemma I.* Riferita la curva BMS a tre assi ortogonali OX, OY, OZ condotti pel centro O, e projettata l'area elementare MOm sui tre piani XOY, XOZ, YOZ nascano le tre projezioni dA, dB, dC. Sarà

$$2dA = ydx - xdy$$
$$2dB = xdz - zdx$$
$$2dC = zdy - ydz$$

Dim. Si dimostrò all' art. 115 che se un linea decomposta al modo d'una forza secondo le x, y, z dà le tre componenti P, Q, R, ed il triangolo formato dalle rette condotte dall' origine ai termini di essa linea si projetta sui tre piani XOY, XOZ, YOZ, nascono le tre projezioni

$$\frac{1}{2}(Py - Qx),\ \frac{1}{2}(Rx - Pz),\ \frac{1}{2}(Qz - Ry)$$

Applicando questo Teorema alla nostra linea Mm, la quale decomposta secondo x, y, z dà dx, dy, dz, e però in luogo di P, Q, R, ponendo rispettivamente dx, dy, dz, provengono tosto le espressioni annunciate.

839. *Lemma II.* In ogni sistema libero sollecitato da qualsivoglia forze, hanno luogo queste tre equazioni

$$\Sigma \,.\, m\frac{y\,ddx - x\,ddy}{dt^2} = \Sigma \,.\, m\,(Py - Qx)$$

$$\Sigma \,.\, m\frac{x\,ddz - z\,ddx}{dt^2} = \Sigma \,.\, m\,(Rx - Pz)$$

$$\Sigma \,.\, m\frac{z\,ddy - y\,ddz}{dt^2} = \Sigma \,.\, m\,(Qz - Ry)$$

Dim. Poichè il sistema è libero, potrà concepire moto rotatorio attorno un asse qualunque. Or supposta una rotazione minima $d\,\phi$ attorno l' asse delle z, sarà (815)

$$\delta x = y\,\delta\phi\,,\quad \delta y = -x\,\delta\phi\,,\quad \delta z = 0$$
$$\delta x' = y'\,\delta\phi\,,\quad \delta y' = -x'\delta\phi\,,\quad \delta z' = 0 \quad \text{ec.}$$

Posti questi valori nell' equazione (B), essa si trasforma nella prima delle tre equazioni annunciate. Similmente supposta una rotazione minima attorno l' asse delle y, si avrà la seconda equazione; e supposta la rotazione attorno l' asse delle x, si avrà la terza.

840. *Scolio.* Quando il sistema è libero, queste tre equazioni vagliono sempre e generalmente, dovunque si ponga l' origine, e comunque si costituiscano gli assi delle coordinate.

Se v' è nel sistema un punto fisso vagliono tuttavia quelle tre equazioni, purchè però l' origine delle coordinate si costituisca nel punto fisso.

Se vi sono due punti fissi, ovvero un asse immobile, allora prendendo quell' asse per asse v. g. delle z, avrà luogo bensì la prima equazione, ma non già le altre due.

841. *Proposizione II.* Sia un sistema libero riferito a tre assi OX, OY, OZ, e le forze acceleratrici P, Q, R sieno tali che i loro momenti di rotazione attorno ciascuno di quei tre assi si annullino. L' area descritta nel tempo t da ciascuna massa m attorno l' origine O s' intenda projettata sul piano XOY. La somma di queste projezioni moltiplicate ciascuna per la massa a cui appartiene, sarà proporzionale al tempo t. E sarà lo stesso delle projezioni fatte sopra i piani XOZ, YOZ.

Dim. Giacchè per ipotesi la somma de' momenti di rotazione delle forze P, Q, R attorno ciascuno de' tre assi è nulla, sarà (114) $\Sigma . m\,(Py-Qx)=0$, $\Sigma . m\,(Rx-Pz)=0$, $\Sigma . m\,(Qz-Ry)=0$. Altronde chiamando come sopra A, B, C le projezioni delle aree sui piani XOY, XOZ, YOZ, abbiamo (838)

$$y\,ddx-x\,ddy=d.(y\,dx-x\,dy)=2\,ddA$$
$$x\,ddz-z\,ddx=d.(x\,dz-z\,dx)=2\,ddB$$
$$z\,ddy-y\,ddz=d.(z\,dy-y\,dz)=2\,ddC$$

Con questo le tre equazioni (839) diventano

$$\Sigma . \frac{2mddA}{dt^2}=0;\ \Sigma . \frac{2mddB}{dt^2}=0;\ \Sigma . \frac{2mddC}{dt^2}=0.$$

Integrando col fare dt costante, e così che l' integrale cominci quando $t=0$, abbiamo

$$\Sigma . 2mA=ct;\ \Sigma . 2mB=c't;\ \Sigma . 2mC=c''t$$

essendo c, c', c'' coefficienti costanti. Dunque ec.

In questo Teorema consiste il principio conosciuto col nome di *Conservazione delle aree.*

842. *Coroll. I.* La condizione dell' annullarsi i momenti di rotazione delle forze acceleratrici rispetto a tutti tre gli assi può avverarsi in più casi. Pri-

mieramente quando non vi sono forze acceleratrici, ed il sistema si muove per impulsi momentanei, o per velocità preconcepite. Allora la condizione è adempiuta dovunque si ponga l' origine delle coordinate, e qualunque ne siano gli assi. Pertanto in questo caso se consideriamo le aree descritte attorno un punto qualunque, e le projezioni loro sopra un piano qualunque che passi per quel punto, la somma di queste projezioni moltiplicate ciascuna per la massa corrispondente, dovrà essere proporzionale al tempo.

843. *Coroll. II.* In secondo luogo, quando le forze acceleratrici consistono in attrazioni scambievoli tra un punto e l' altro: poichè queste forze a due a due sono eguali e contrarie, onde i loro momenti di rotazione sono nulli rispetto di qualunque asse immaginabile. Anche in questo caso, come nel precedente, il Teorema vale per le aree descritte attorno un punto qualunque, e projettate sopra qualunque piano che passi per quel punto.

844. *Coroll. III.* In terzo luogo, quando le forze acceleratrici sono tutte dirette ad un sol centro. Allora il momento di rotazione di ciascuna forza sarà nullo rispetto di ogni asse condotto per quel centro. Quindi in questo caso vale il Teorema soltanto per le aree descritte attorno al centro delle forze, e projettate sopra un piano che passi per il suddetto centro.

845. *Coroll. IV.* Se un corpo è sollecitato da una forza acceleratrice diretta ad un centro, descriverà intorno ad esso delle aree proporzionali ai tempi; e viceversa.

Sia O il centro della forza, ed XOY un piano condotto per O e per la direzione della velocità da principio impressa al mobile. È facile il vedere che la trajettoria giacerà tutta sul piano XOY. Quindi l' area descritta dal corpo si confonde colla sua projezione A. Ora abbiamo (844) $2mA = ct$: dunque ec.

E viceversa se $2mA = ct$, sarà ancora $\frac{2m\,ddA}{dt^2} = 0$. Dunque (841) sarà nullo il momento di rotazione della forza rispetto dell' asse OZ. Dunque la sua direzione taglierà l' asse OZ; e poichè giace nel piano XOY, passerà necessariamente pel punto O.

846. *Proposizione III.* Sia il sistema da tali forze animato, che $Pdx + Qdy + Rdz$ sia una differenziale esatta $= d\phi$, e similmente $P'dx' + Q'dy' + R'dz' = d\phi'$ ec. Sarà

$$\Sigma \,.\, mV^2 = \text{cost.} + 2\Sigma \,.\, m\phi$$

Dim. Valendo l' equazione (B) per ogni moto minimo che possa cadere nel sistema proposto, varrà senza dubbio anche per quel moto minimo che il sistema realmente concepisce nell' istante dt. Potremo adunque nell' equazione (B) fare $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, $\delta x' = dx'$ ec. Con queste sostituzioni essa diventa

$$\Sigma \,.\, m(udu + vdv + wdw) = \Sigma \,.\, md\phi$$

ed integrando

$$\Sigma \,.\, \frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + w^2) = \Sigma \,.\, \frac{1}{2} mV^2 = \Sigma \,.\, m\phi + \text{cost.}$$

onde ec.

847. *Coroll. I.* Se non vi sono forze acceleratrici,

la somma delle forze vive (402) de' corpi del sistema, o sia la forza viva totale del sistema, è costante. Nel che consiste il principio così detto della *Conservazione delle forze vive.*

848. *Coroll. II.* Ma quando vi sono forze acceleratrici, la forza viva si muta nel passare il sistema da una situazione ad un' altra; e cresce o cala, secondo che cresce o cala $\Sigma . m \phi$.

Sia nel principio nel moto $V = U$, e $\phi = \varphi$. Sarà dunque allorchè $t = 0$, $\Sigma . m U^2 = \text{cost.} + 2\Sigma . m\varphi$.
Ma scorto il tempo t abbiamo $\Sigma . m V^2 = \text{cost.} + 2\Sigma . m\phi$.
Adunque sarà il guadagno della forza viva

$$\Sigma . m V^2 - \Sigma . m U^2 = 2\Sigma . m \phi - 2\Sigma . m \varphi .$$

849. *Coroll. III.* Il valore di ϕ non dipende se non che dalle forze acceleratrici P, Q, R e dalle coordinate x, y, z de' punti a cui sono applicate. Dal che si raccoglie. 1.° Che se dopo un tempo t i punti A, B, C ec. del sistema saranno tornati dov' erano da prima, anche la forza viva del sistema sarà tornata qual era prima, qualunque siano state le curve descritte dai suddetti punti. 2.° Che se quei punti sono passati altrove, come in a, b, c ec., la forza viva avrà bensì sofferto cangiamento; ma questo cangiamento sarà lo stesso, qualunque siano state le curve Aa, Bb, Cc ec. descritte da varj punti del sistema.

850. *Coroll. IV.* Applicando queste dottrine al movimento d' un sol corpo isolato, si vede che se questo non è spinto da forza acceleratrice, il suo moto sarà uniforme, qualunque curva esso percorra. Poichè sarà $\varphi = 0$, e quindi $m V^2$ ed anche V saranno costanti.

851. *Coroll. V.* Ma se viene stimolato da forze acceleratrici, e partendo dal punto A con una data velocità U sia pervenuto nel punto a, la velocità V che egli avrà in a sarà la medesima, qualunque sia stata la curva Aa per cui v'è giunto. Poichè (849) la mutazione della forza viva $mV^2 - mU^2$, e per conseguenza anche la velocità V, è affatto indipendente dalla curva Aa.

852. *Coroll. VI.* Sia un sistema di corpi gravi che partendo dalla quiete si muova, cangiando comunque di sito. Ad ogni istante del moto la forza viva del sistema sarà la stessa che sarebbe se ciascuno de' corpi fosse disceso liberamente per un' eguale altezza verticale.

Poichè se prendiamo le ordinate z verticali, sarà $\phi = gz$, chiamando g la gravità. Adunque se nel principio del moto era $z = Z$, ed $U = 0$, avremo (848) $\Sigma . mV^2 = 2g\Sigma . mz - 2g\Sigma . mZ$. Ora fingiamo che ciascuna massa m scenda liberamente per l' altezza $z - Z$, essa avrà acquistata la velocità $\sqrt{2g(z-Z)}$, onde la sua forza viva sarà $2mg(z - Z)$, e la forza viva del sistema sarà come sopra $2g\Sigma . mz - 2g\Sigma . mZ$. Dunque ec.

853. *Coroll. VII.* Nella stessa ipotesi, il centro di gravità del sistema sarà disceso di tanto, di quanto risalirebbe, se ciascun corpo risalisse verticalmente colla velocità acquistata nel discendere.

La discesa del centro di gravità esprimesi palesemente per $\frac{\Sigma . mz - \Sigma . mZ}{\Sigma . m}$. Ora se tutti i corpi del sistema risalissero verticalmente colla velocità V, ciaschedun d' essi salirebbe (217) per

l' altezza verticale $\frac{V^2}{2g}$, onde la salita del centro di gravità sarebbe $\frac{\Sigma . m V^2}{2g\Sigma . m}$. Ma abbiamo veduto (852) essere $\Sigma . m V^2 = 2g\Sigma . mz - 2g\Sigma . mZ$. Dunque ec.

Propose Eugenio questo Teorema, e se ne valse nella ricerca del centro d' oscillazione; ed appresso Daniele Bernulli da questo principio dedusse le leggi dell' Idrodinamica.

854. *Coroll. VIII.* Ritornando ad un sistema animato da qualsivoglia forze, suppongo che nel suo movimento esso venga a passare per quella situazione in cui se da principio fosse stato collocato, sarebbe rimasto in equilibrio. Giunto il sistema a questa situazione, quivi la sua forza viva sarà un massimo o un minimo; e viceversa.

Poichè nella situazion d' equilibrio la somma de' momenti delle forze (806) dev' essere eguale a zero, e per conseguenza $\Sigma . m \varphi$ sarà un massimo o un minimo. Dunque ancora lo sarà $\Sigma . m V^2$.

Così nel pendolo oscillante la forza viva è massima, quando il centro di gravità passa sotto il fulcro; minima quando passa al di sopra. Devesi questo Teorema al signor Courtivron.

855. *Scolio I.* Tutti questi Teoremi sul conservarsi o alterarsi la forza viva d' un sistema che passa da una situazione ad un' altra si verificano nel supposto che durante questo passaggio non s' incontri verun ostacolo atto a cangiare subitamente d' una quantità finita le velocità de' corpi componenti il sistema. Poichè allora da un istante

all' altro le differenze delle coordinate x, y, z non sarebbono più infinitesime, ma finite. Nè potremmo più fare come prima (846) le variazioni δx, δy, δz eguali a queste differenze: poichè il principio delle velocità virtuali, generalmente parlando, non ha luogo se non pei moti minimi, e per le variazioni infinitesime delle coordinate.

856. *Scolio II.* Egli è perciò che nell' urto de' corpi duri si fa una perdita di forza viva: poichè le velocità cangiano subitamente nella percossa. Se la velocità di ciascuna massa si decompone in due, l' una che si conserva dopo l' urto, l' altra che nell' urto si estingue; quella parte di forza viva che corrisponde a quest' ultima velocità viene a perdersi, conservandosi l' altra.

857. *Scolio III.* Ma nella percossa de' corpi elastici, cangiandosi la velocità per gradi minimi durante la compressione e la successiva restituzione delle parti, la legge delle forze vive avrà luogo. Se l' elasticità è perfetta, ogni particella si restituisce al punto donde partì, e però (849) la forza viva si riproduce qual era prima. Se imperfetta, non operandosi per intero la restituzione, dev'esservi perdita di forza viva.

858. *Proposizione IV.* Sia di nuovo il sistema da tali forze animato che ciascun trinomio $P dx + Q dy + R dz$ sia differenziale esatto. Nel tempo t le masse m, m', m'' ec. dai punti A, B, C ec. passino ne' punti a, b, c ec. per le curve Aa, Bb, Cc ec. Dico che queste curve sono tali, che se ciascuna massa m si moltiplica per l' integrale $\int V ds$ esteso dal punto di partenza

A sino al punto d' arrivo a, la somma di questi prodotti è un minimo.

Voglio dire che $\Sigma . m \int V ds$ avrà minor valore che non avrebbe se i corpi descrivessero tutt' altre curve comprese fra gli stessi termini A ad a; B e b ec.

Dim. Poichè (846)

$\Sigma . m V^2 = \text{cost.} + 2 \Sigma . m (P dx + Q dy + R dz)$
avremo differenziando secondo δ

$$\Sigma . m V \delta V = \Sigma . m (P \delta x + Q \delta y + R \delta z)$$

Ponendo questo valore nell' equazione (B) dell' art. 829, ed avvertendo essere $V dt = ds$ verrà

$$\Sigma . m ds \delta V = \Sigma . m (du \delta x + dv \delta y + dw \delta z)$$

Altronde poichè $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ differenziando secondo δ, e poi dividendo per dt, troveremo

$V \delta ds = u \delta dx + v \delta dy + w \delta dz = u d \delta x + v d \delta y + w d \delta z$
e perciò ancora

$\Sigma . m V \delta ds = \Sigma . m (u d \delta x + v d \delta y + w d \delta z)$
Quindi avremo

$\Sigma . m \delta (V ds) = \Sigma . (m ds \delta V + m V \delta ds) =$
$\Sigma . m d (u \delta x + v \delta y + w \delta z)$. Ed integrando
$\Sigma . \int m \delta (V ds) = \delta \Sigma . m \int V ds =$
$\text{cost.} + \Sigma . m (u \delta x + v \delta y + w \delta z)$.

Compio ora l' integrale, sicchè per ciascun corpo si estenda dal punto di partenza A sino al punto d'arrivo a, ed allora è manifesto che se chiamerò M' il valore che acquista $\Sigma . m (u \delta x + v \delta y + w \delta z)$ quando le coordinate corrispondono ai punti di partenza, ed M'' il valore che acquista quando corrispondono ai punti d' arrivo, sarà

$$\delta \Sigma . m \int V ds = M'' - M'.$$

Ma per ipotesi i punti di partenza A, B, C ec. e i punti d' arrivo a, b, c ec. sono fissi ed invariabili, poichè si paragonano tra loro le curve comprese fra quei termini. Dunque le variazioni delle coordinate δx, δy, δz che corrispondono a quei punti, sono eguali a zero. Dunque $M' = M'' = 0$; e $\delta \Sigma . m V ds = 0$; e per conseguenza $\Sigma . m \int V ds$ è un minimo.

859. *Scolio.* Non possiamo prender equivoco nel dire che l' equazione precedente indichi un minimo anzichè un massimo: poichè $\int V ds$ può crescere all' infinito, potendosi allungare all' infinito la strada che dal punto A conduce al punto a.

860. *Coroll. I.* Applicando il Teorema al movimento d'un sol corpo isolato, avremo $\delta \int V ds = 0$. Onde impariamo questa singolar proprietà della trajettoria descritta da un punto mobile, che presi in essa due punti qualunque A, a, l' integrale $\int V ds$ per la curva Aa è minore che non sarebbe per qualunque altra curva che congiungesse gli stessi termini A, a.

861. *Coroll. II.* Se il corpo non è stimolato da forze acceleratrici, sarà (850) V costante e diventerà $\delta s = 0$. Quindi esso si porterà dal punto A al punto a per la linea brevissima. E questa sarà evidentemente la linea retta, se il punto è libero: che se il punto si move sopra una superficie resistente, sarà la linea più breve che su quella superficie congiunge i punti A ed a.

CAP. VI.

Come dal medesimo principio si ricavino le equazioni del moto.

862. *Proposizione I.* Determinare il moto d' un punto libero.

L' equazione (B) somministra a prima giunta queste tre $P = \frac{ddx}{dt^2}$, $Q = \frac{ddy}{dt^2}$, $R = \frac{ddz}{dt^2}$, per le quali si determinano tutte le condizioni del moto. Si confronti l' art. 231.

863. *Proposizione II.* Determinare il moto d' un punto obbligato a scorrere sopra una data superficie.

Sia l' equazione di questa superficie $ldx + mdy + ndz = 0$. Supposto un menomo movimento del punto sulla superficie, pel quale le sue coordinate x, y, z acquistino gl' incrementi δx, δy, δz dovrà essere $l\delta x + m\delta y + n\delta z = 0$. Per mezzo di questa equazione si elimini δx dall' equazione (B) e si pongano eguali a zero i coefficienti delle altre due variazioni δy, δz che rimangono indeteminate. Avremo le due equazioni

$$m - Ql = \frac{mddx - lddy}{dt^2}; \quad Pn - Rl = \frac{nddx - lddz}{dt^2}$$

alle quali unendo l' equazione della superficie $ldx + mdy + ndz = 0$, si hanno tre equazioni atte a trovare per qualsivoglia tempo t le tre coordinate x, y, z che mostrano il luogo del punto mobile.

Le due equazioni qui sopra trovate sono quelle stesse che risultano eliminando K dalle tre equazioni dell' art. 252.

864. *Proposizione III.* Determinare il moto d'un corpo solido libero, di figura invariabile.

Le tre equazioni dell' art. 833, e le tre dell' art. 839, tutte sei derivate dall' equazione fondamentale (B) racchiudono la piena e compiuta determinazione del moto. Chiamando M la massa del corpo, dM l'elemento della massa, ed invece del simbolo Σ adoperando il segno sommatorio degli integrali, poichè si tratta d' un sistema continuo, le tre equazioni (833) diventano

$$\int P\,dM = \int dM \,.\, \frac{ddx}{dt^2}$$

$$\int Q\,dM = \int dM \,.\, \frac{ddy}{dt^2}$$

$$\int R\,dM = \int dM \,.\, \frac{ddz}{dt^2}$$

E le tre equazioni (839) diventano

$$\int \frac{dM}{dt}(y\,ddx - x\,ddy) = \int dM\,dt\,(Py - Qx)$$

$$\int \frac{dM}{dt}(x\,ddz - z\,ddx) = \int dM\,dt\,(Rx - Pz)$$

$$\int \frac{dM}{dt}(z\,ddy - y\,ddz) = \int dM\,dt\,(Qz - Ry)$$

Queste tre equazioni sono quelle stesse che per altra via si trovarono all' art. 380 ed ivi si mostrò come per esse il moto si determina compiutamente.

865. *Scolio.* Se il corpo è sostenuto da un fulcro, o perno immobile, le tre prime equazioni non hanno più luogo; sussistono le tre ultime, purchè

(840) si sostituisca l' origine delle coordinate nel punto fisso; e per esse si determina la rotazione del corpo intorno al suo perno.

Che se il corpo è legato ad un asse immobile, conviene prendere quell' asse per uno degli assi delle coordinate, per esempio delle z. Allora delle tre ultime equazioni avrà luogo soltanto la prima (840) e per essa si determinerà la rotazione del corpo.

866. *Proposizione IV.* Determinare il moto di una corda flessibile fissa in uno de' suoi termini, sollecitata in ogni suo punto da forze date, e rimossa comunque dalla positura rettilinea nella quale sarebbe in equilibrio.

Prendo l' origine delle ascisse nel termine fisso, le x sulla direzione rettilinea della corda equilibrate, e faccio le ordinate y perpendicolari alle x. Essendo ds un elemento qualunque della corda incurvata, siano P, Q le forze che lo sollecitano secondo le coordinate x, y, sia h la grossezza o sezione strasversale della corda in quell' elemento, e q la sua densità, onde sarà $hqds$ la massa dell' elemento ds. Sia finalmente T la tensione della fune nel punto determinato dalle coordinate x, y. Sarà per questo sistema l'equazione (B)

$$=\int\left(P-\frac{ddx}{dt^2}\right)hqds\delta x+\int\left(Q-\frac{ddy}{dt^2}\right)hqds\delta y-\int T\delta ds$$

L' ultimo termine colle riduzioni altrove insegnate (826) e praticate (827) si converte in questi due

$$\int\delta x d.\frac{Tdx}{ds}+\int\delta y d.\frac{Tdy}{ds}$$

Facendone la sostituzione, e poscia uguagliando a zero i coefficienti di δx, δy avremo per la determinazione del moto della corda queste due equazioni

$$\frac{ddx}{dt^2}=P+\frac{1}{hqds}d.\frac{Tdx}{ds};\ \frac{ddy}{dt^2}=Q+\frac{1}{hqds}d.\frac{Tdy}{ds}$$

867. *Scolio.* Prima di applicare le equazioni trovate da alcun caso particolare gioverà avvertire, che le differenze ddx, ddy ne' primi membri sono relative soltanto alla variabilità del tempo, nè altro esprimono se non che la mutazione delle coordinate x, y d'uno stesso punto ne' diversi tempi; siccome dalla loro genesi (829) è manifesto. Per lo contrario ne' secondi membri la differenza ds, e le dx, dy da quella derivate (827) suppongono il tempo costante, ed esprimono soltanto la mutazione degli elementi x, y, s pe' diversi punti della curva, e nello stesso tempo. Per il che converrà distinguerle cogli usati simboli delle differenze parziali.

868. *Coroll. I.* Se poughiamo che la corda pochissimo s' allontani dalla positura rettilinea, potremo fare $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=0$, e $ds=dx$. Quindi la prima equazione darà $T=\theta-\int Phqds$, essendo θ una costante. E la seconda, sostituito questo valore, e differenziando nel secondo membro col prender costante l' elemento ds, diventerà

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)-\left(\frac{\theta-\int Phqds}{hq}\right)\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)+P\left(\frac{dy}{dx}\right)-Q=0.$$

869. *Coroll. II.* Sia una catena di peso e di grossezza uniforme, pendente dall' alto liberamente, e di pochissimo smossa dalla verticale. Faremo $P=g$,

$Q = 0$; e sarà $T = \theta - ghqs$. Dicasi l la lunghezza di tutta la catena; è manifesto che quando $s = l$ dovrà essere $T = 0$; onde $\theta = ghql$, e $T = ghq(l - s)$. Quindi

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - g(l - s)\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Questa equazione rappresenta la legge delle oscillazioni della catena; ma i noti metodi non giungono ad integrarla.

870. Sia una corda elastica di grossezza e densità uniforme, fissa in ambi gli estremi, e tesa da un peso $= \theta$. Sia priva di gravità, o veramente si trascuri il suo peso siccome minimo a fronte del peso tendente. Qui fatto $P = Q = 0$, avremo $T = \theta$, e l' equazione

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - \frac{\theta}{hq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = 0$$

della quale si conosce l' integrale completo

$$y = F\left(x + t\sqrt{\frac{\theta}{hq}}\right) + f\left(x - t\sqrt{\frac{\theta}{hq}}\right)$$

dove i simboli F, f denotano funzioni arbitrarie.

871. *Coroll. IV.* Queste funzioni si determinano quando si conosca la figura iniziale della corda, e la velocità iniziale impressa a ciascun punto della medesima. Posto che queste cose ci siano note, conosceremo per ogni ascissa x il valore di y e di $-\left(\frac{dy}{dt}\right)$ quando $t = 0$. Ora se per brevità facciamo $\sqrt{\frac{\theta}{hq}} = b$, abbiamo generalmente

$$y = F(x + bt) + f(x - bt)$$

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -bF'(x + bt) + bf'(x - bt)$$

denotando coi simboli F', f' i differenziali di F, f; onde sia $d.F(x+bt) = (dx+bdt)\,F'(x+bt)$. Dunque se per un ascissa qualunque x sia l' ordinata iniziale s, e la velocità iniziale u, avremo

$$s = F.x + f.x\,;\quad u = -bF'.x + bf'.x$$

e moltiplicando l' ultima equazione per dx, poscia integrandola, avremo $-\int udx = bF.x - bf.x$. Sarà dunque

$$F.x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2b}\int udx$$

$$f.x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2b}\int udx$$

dove i secondi membri saranno funzioni note di x.

Ora nella prima equazione in luogo di x si ponga $x+bt$, e nella seconda in luogo di x, si ponga $x-bt$. Avremo così espressi in x e t i valori delle due funzioni $F(x+bt)$, $f(x-bt)$ la somma delle quali ne dà il valore di y.

872. *Coroll. V.* Ma qui convien badare che non abbiamo i valori di s, e di u, e quindi di $F.x$, e di $f.x$ se non per le ascisse x comprese tra i limiti o, ed l, chiamando l la lunghezza della corda da un capo all' altro. Per conseguenza il metodo insegnato non può darci le funzioni $F(x+bt)$, $f(x-bt)$ se non quando $x \pm bt$ trovasi compreso tra questi limiti. Ma il tempo t cresce continuamente; e ogni poco basta a far che $x+bt$ diventi maggiore di l, ed $x-bt$ negativo; onde più non potremmo nella continuazione del tempo determinare il movimento e la figura della corda.

Soccorre a questo difetto un' altra condizione data, la qual è che essendo fissi i due termini

della corda, dovrà essere $y = 0$ quando $x = 0$, e quando $x = l$, qualunque sia t; onde abbiamo $F.bt + f.-bt = 0$; $F(l + bt) + f(l - bt) = 0$ potendo esser t un qualunque numero positivo.

Dunque in generale

$F.z = -f.-z$; $F(l+z) = -f(l-z)$ essendo z un numero positivo qualunque. Per cui se metteremo successivamente $l \pm z$, $2l \pm z$, $3l \pm z$ ec. avremo dalla prima equazione

$$F(l \pm z) = -f(-l \mp z)$$
$$F(2l \pm z) = -f(-2l \mp z)$$
$$F(3l \pm z) = -f(-3l \mp z)$$
$$F(4l \pm z) = -f(-4l \mp z) \text{ ec.}$$

e dalla seconda

$$F(2l \pm z) = -f.\mp z$$
$$F(3l \pm z) = -f(-l \mp z)$$
$$F(4l \pm z) = -f(-2l \mp z) \text{ ec.},$$

onde si traggono le seguenti conchiusioni

$$F.z = F(2l+z) = F(4l+z) \text{ ec.}$$
$$= -f(-2l-z) = -f(-4l-z) \text{ ec.}$$
$$f.z = f(-2l+z) = f(-4l+z) \text{ ec.}$$
$$= -F(2l-z) = -F(4l-z) \text{ ec.}$$

Dalla prima conchiusione si riconosce facilmente che quando conosceremo il valore di $F.z$ per ogni numero z compreso tra 0 ed l, potremo conoscerlo ancora per qualunque numero positivo, comunque maggiore di l. E similmente dalla seconda conchiusione si vede, come dato il valore di $f.z$ per ogni numero z compreso fra 0 ed l, se ne deduce il valore di f, z per ogni numero negativo. E così abbiamo quel che ci mancava a compiere il calcolo de' valori di y indicato nell' articolo precedente.

873. *Coroll. VI.* Nell' equazione

$$y = F(x + bt) + f(x - bt)$$

si ponga successivamente $bt = 2l$, $4l$, $6l$ ec. Il primo termine prenderà di mano in mano i valori $F(2l + x)$, $F(4l + x)$ ec. tutti (872) eguali ad $F.x$. E il secondo termine i valori $f(-2l + x)$, $f(-4l + x)$ ec. tutti eguali al $f.x$. Dunque rimarrà sempre $y = F.x + f.x$ qual era al principio del moto.

Di qui si vede che la corda vibrante ritorna periodicamente al sito iniziale, ad eguali intervalli di tempo $= \frac{2l}{b}$.

874. *Coroll. VII.* Nella stessa equazione si ponga successivamente $bt = l$, $3l$, $5l$ ec. ma nello stesso tempo si trasporti l' origine delle ascisse nell' altro capo della corda, cangiando x in $l - x$. Allora il primo termine $F(x + bt)$ divenuto $F(l - x + bt)$ prenderà successivamente i valori $F(2l - x)$, $F(4l - x)$ ec. tutti (872) eguali a $-f.x$. E l' altro termine $f(x - bt)$ divenuto $f(l - x - bt)$ acquisterà i valori $f. - x$, $f(-x - 2l)$ ec. tutti eguali a $-F.x$. Dunque sarà sempre $y = -F.x - f.x$; che è il valore iniziale, ma con segno contrario.

Di qui si vede che scorso dal principio del moto il tempo $t = \frac{l}{b}$, la corda ripiglia ancora la stessa curvatura di prima, ma doppiamente arrovesciata, vale a dire di sotto in su, e da destra a sinistra; ed a questa positura ritorna poi periodicamente ad intervalli di tempo $= \frac{2l}{b}$.

875. *Coroll. VIII.* Oscilla dunque la corda alla guisa d' un pendolo, compiendo ciascuna oscillazione del tempo $t = \frac{l}{b} = \frac{l \sqrt{hq}}{\sqrt{\theta}}$. Sono le sue vibrazioni isocrone, e sincrone a quelle d' un pendolo semplice di lunghezza $\frac{g h q l^2}{\pi^2 \theta}$. Ed il numero delle vibrazioni fatte in egual tempo è in ragion composta della sudduplicata della tensione, dell' inversa della lunghezza, e dell' inversa sudduplicata della grossezza, e della densità.

876. *Coroll. IX.* Se non fu impresso alla corda alcun movimento iniziale, sarà $u = 0$; quindi $f . x = F . x$, ed $y = F(x + bt) + F(x - bt)$. Se la corda da principio era distesa in linea retta, sarà $s = 0$, onde $f . x = - F . x$, ed $y = F(x + bt) - F(x - bt)$. In ambedue i casi vi è una sola funzione da determinarsi, e il calcolo torna più semplice.

Del resto chi amasse vedere spiegata con minuta particolarità e con mirabile chiarezza la costruzion geometrica della corda vibrante, consulti una bellissima Dissertazione di Eulero nel tomo terzo delle Miscellanee di Torino.

FINE.

TAVOLA DE' CAPITOLI.

LIBRO I.

DELL' EQUILIBRIO.

LIBRO II.

DEL MOTO.

SEZIONE I.

Del Moto d' un punto o elemento materiale.

SEZIONE II.

Del Moto de' sistemi di forma invariabile.

SEZIONE III.

Del Moto cagionato dalla Percossa.

LIBRO III.

DELLE FORZE MOVENTI E RESISTENTI.

LIBRO IV.

DELL' EQUILIBRIO DELLE FABBRICHE.

LIBRO V.

DELLE MACCHINE.

SEZIONE I.

Delle Macchine in equilibrio.

SEZIONE II.

Delle Macchine nello stato prossimo al moto.

SEZIONE III.

Delle Macchine in moto.

APPENDICE.

SUL PRINCIPIO DELLE VELOCITÀ VIRTUALI, E SUOI USI NELLA MECCANICA.

FINE DEL VOLUME PRIMO.